EXERCICE 1 : (Bac Maths 2017)

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

   a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

   b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x(mod 53)$

2) Soit l'équation (E_1) : $x^{29} \equiv 2(mod 53)$ où $x \in \mathbb{Z}$

   Montrer que 2^9 est une solution de (E_1)

3) Soit x une solution de (E_1).

   a) Montrer que x est premier avec 53.

   b) Montrer que $x^{261} \equiv x(mod 53)$

   c) En déduire que $x \equiv 2^9\ (mod 53)$

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35(mod 53)$

   b) Donner alors l'ensemble de solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$

   a) Vérifier que (3,4) est une solution de l'équation (E_2)

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} x \equiv 34(mod 71) \\ x^{29} \equiv 2(mod 53) \end{cases}$

EXERCICE 2: (Bac Maths 2014)

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1(mod 10)$.

   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv 0(mod 10)$

   b) En déduire que $a^{10} \equiv 1(mod 10)$

   (On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + \cdots + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

   b) En déduire que $b^4 \equiv 1(mod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

   a) Montrer que $b^{40} \equiv 1(mod 10^2)$

   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.

EXERCICE 3:

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right) dt$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

   b) Donner une équation de la tangente T à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

2/ a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$; $\dfrac{1}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

   b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$; $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3/ a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$; $\quad \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln\left(1+e^{-2x}\right)\right] \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\left[1-e^{-2x}\right]$

b) En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L dont on donnera un encadrement.

4/ a) Montrer que pour tout réel t ; $\quad \ln\left(1+e^{-2t}\right) \geq -2t$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de (Γ). (on prendra $L \simeq 0,4$)

EXERCICE 4:

1) Résoudre dans IR les équations et les inéquations suivantes:

a) $\sqrt{3^x - e} = 1$

b) $\left(\frac{e}{2}\right)^n \geq e \quad ; \; n \in IN$

c) $3.2^{x+1} - 3^x \leq 0$

d) $x^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt{x}$

2) Vérifier dans chacun des cas suivants que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$:

a) $f : x \longmapsto ln(1+e^{\sqrt{x}}) \quad ; \quad$ I= IR

b) $f : x \longmapsto 2^{\sqrt{x}} \; ; \quad$ I= $]0,+\infty[$

EXERCICE 5:

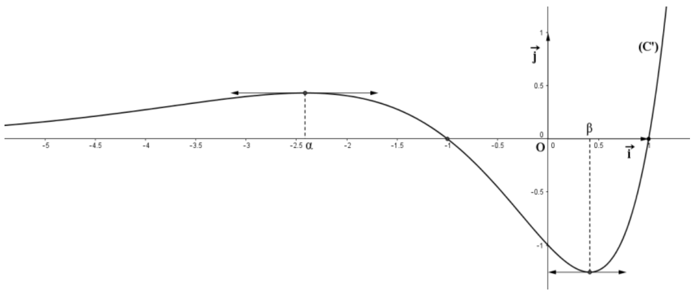
1) Soit La fonction f définie sur IR\{0} par : $f(x) = ln\,(1+e^{\frac{1}{x}})$

Sachant que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]ln2,+\infty[$, montrer que :

$f^{-1}(x) = \frac{1}{ln\,(e^x - 1)} \quad \forall\, x \in]ln2,+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de (C).

EXERCICE 6:



Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par $f(x)= (ax+b)^2.e^x$, où $a > 0$ et $b < 0$.
La courbe (C') admet une asymptote d'équation : y =0 au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe $(O,\vec{j})$.

I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a = 1$ et $b = -1$

2) Par une lecture graphique :

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x) - f'(x) = (2-2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C').

3) Tracer (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prend $\alpha = -1-\sqrt{2}$ et $\beta = -1+\sqrt{2}$)

III/ Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C),(C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

IV/ On pose $u_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$ pour tout $n \in IN^*$.

1) Donner la valeur du terme u_1.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0 \ \forall\, n \in IN^*$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que : $u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n \ \ \forall\, n \in IN^*$.

4) Montrer que pour tout $\in IN^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 7:

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartien l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.