REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques Section : SCIENCES ET ECH SERIE n° :4 — DURE : 3H Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION4

EXERCICE N°1 : **(4 points)**

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2-8z+64=0$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\ \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=4+4i\sqrt{3}$, $b=4-4i\sqrt{3}$ et $c=8i$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle $\mathscr{C}$ de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\ \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a'=a\,e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b'=b\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c'=c\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b'=8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a'=-4+4\,i\sqrt{3}$ et $c'=-4\sqrt{3}+4\,i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

Calculer r et s. On admet que $t=2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

EXERCICE N°2 : **(6poitns)**

$(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ Étant un repère de l'espace $\mathcal{E}$

Soit le plan P :$2x + 2y - z = 0$, le point A(2,2,-1) et la droite D :$x = y = z$

1) a) Trouver une représentation paramétrique de D

b) Donner un point B et un vecteur directeur $\vec{U}$ de D

2) a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à D

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D' passant par A et perpendiculaire à P

3) Soit M(m,m,m) un point de D

a) Montrer que $AM^2 = 3(m-1)^2 + 6$

b) Déterminer le point M_0 de D pour que la distance AM_0 soit minimale

c) Déduire la distance de A à la droite D

4) a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{U}$

b) Retrouver d(A,D)

EXERCICE N°03 : **(4poitns)**

On définit deux suites u et v sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n < v_n.$$

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

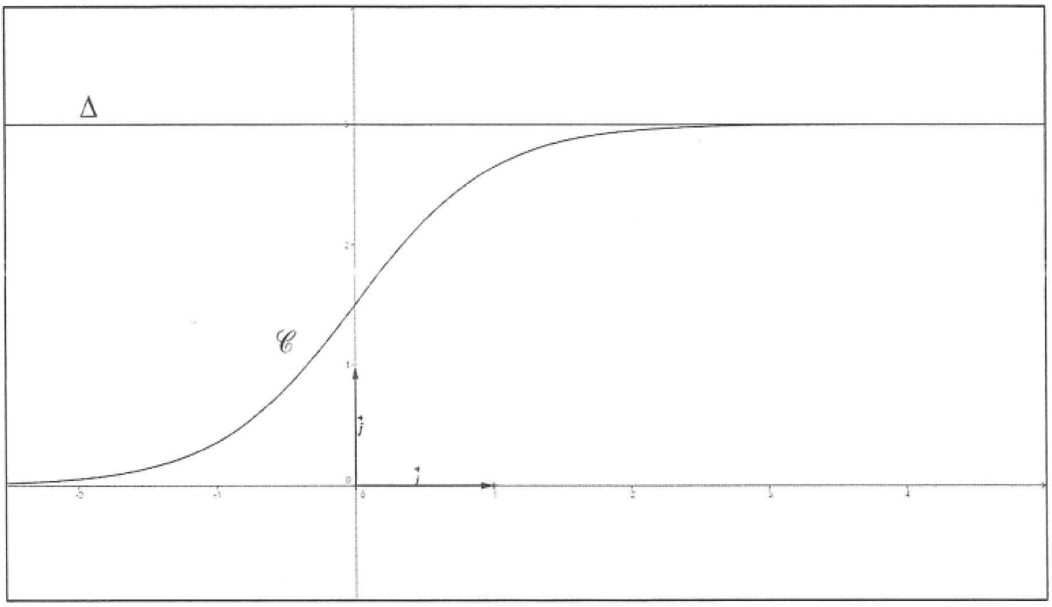
$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

EXERCICE N°04 : (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y=3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur **R**.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=2{,}999$ admet une unique solution α sur **R**.

   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur **R** par $h(x)=3-f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur **R**.
2. On désigne par H la fonction définie sur **R** par $H(x)=-\dfrac{3}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{-2x})$.

   Démontrer que H est une primitive de h sur **R**.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$.

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.