Série d'exercices N°3

Mathématiques

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, cocher la bonne case.

Questions	Réponses
1. La limite à gauche en 0 en de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x+x^2+x^3+x^4}{\sqrt{-x^3}}$ est égale à	❒ $+\infty$ ❒ $-\infty$ ❒ 0
2. On forme un graphe en reliant tous les sommets d'un hectogone (100 côtés), cet hectogone possède	❒ 9900 arêtes ❒ 4950 arêtes ❒ 199 arêtes
3. Soit G un graphe simple ayant 12 arêtes, la somme des degrés des sommets de ce graphe est égale à	❒ 6 ❒ 24 ❒ 12
4. Un trapèze est un graphe d'ordre	❒ 3 ❒ 4 ❒ 5

Exercice 2

Cinq joueurs souhaitent organiser un tournoi de Ping-pong où chaque joueur rencontre 3 autres joueurs. Est-ce possible ? Justifier votre choix à l'aide d'un graphe.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1+x-\sqrt{x+3}}{x-1}$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.
4. Soit $x \in \mathscr{D}_f$

   a) Vérifier que l'on a : $f(x) = 1 + \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

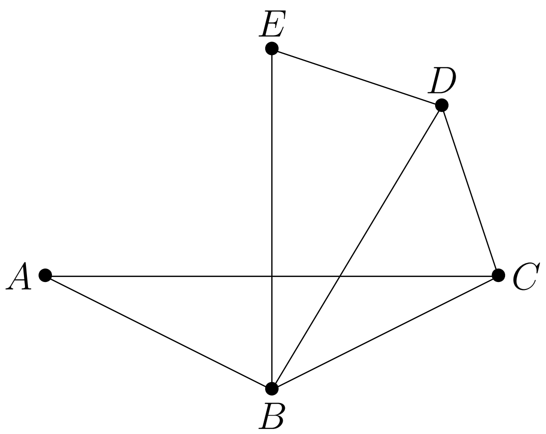
b) Prouver que : $\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = \dfrac{-1}{2+\sqrt{x+3}}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis interpréter ce résultat graphiquement.

Exercice 4

On donne le graphe G ci-dessous formé des points A, B, C, D et E.



1. Trouver l'ordre de G ainsi que le nombre de ses arêtes.
2. Ce graphe G est-il orienté ? est-il complet ? est-il connexe ? Justifier votre réponse.
3. Recopier puis compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré					

4. Donner pour ce graphe
   a) Une chaîne de longueur 4.
   b) Une chaîne fermée de longueur 5.
   c) Un cycle de longueur 4.
5. a) En utilisant le théorème de EULER, prouver que G admet une chaîne eulérienne.
   b) Donner un exemple d'une chaîne eulérienne.
   c) Le graphe G admet-il un cycle eulérien ? Justifier.

Exercice 5

Dans une ville, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

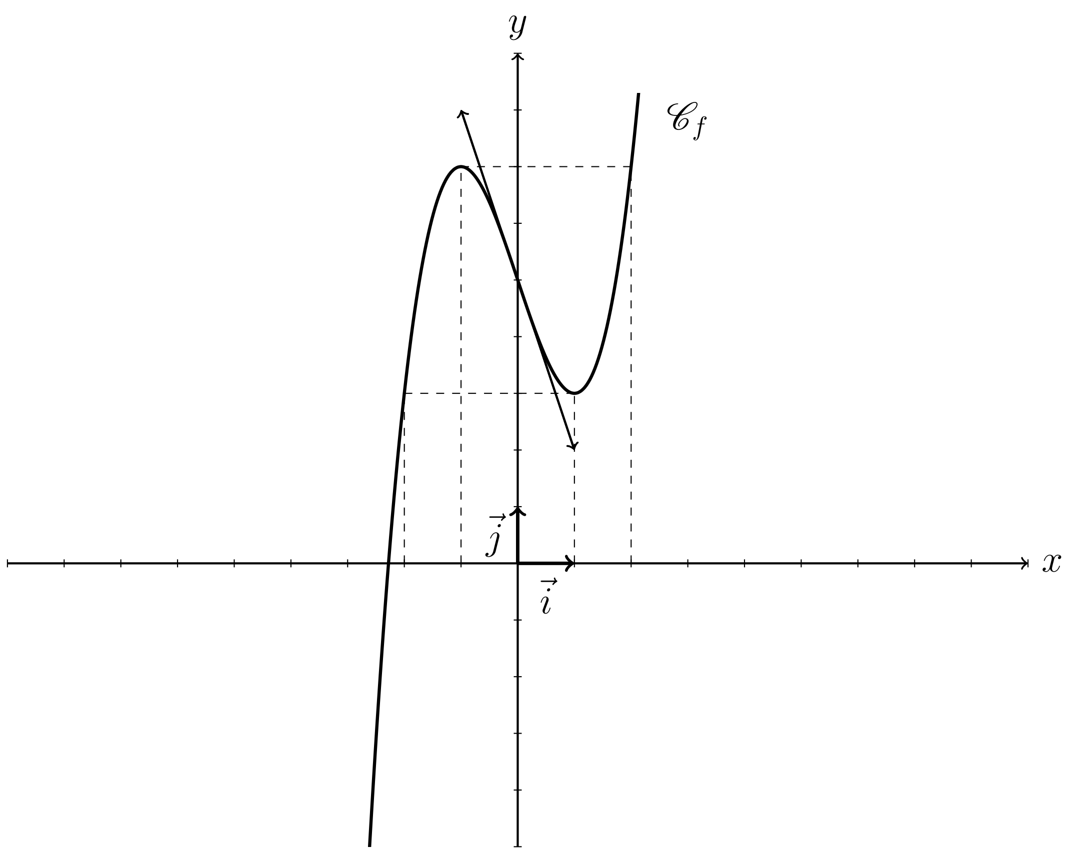
	B	C	L	M	P
B		$\times$		$\times$	$\times$
C	$\times$		$\times$	$\times$	
L		$\times$		$\times$	
M	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
P	$\times$			$\times$	

1. Dessiner un graphe représentant cette situation.
2. a) Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan.

   b) Proposer un tel trajet.
3. Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ? Justifier.

Exercice 6

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormée $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On sait en outre que : $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique infinie au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



1. Donner $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f(-2)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

3. a) Montrer que, sur $]-\infty\,;1]$, f admet un maximum absolu que l'on déterminera.

   b) Montrer que, sur $[-1\,;+\infty[$, f admet un minimum absolu que l'on déterminera.

4. a) Déterminer le nombre de solutions des équations : $f(x) = 0$ et $f(x) = 6$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > 5$.

5. a) Calculer $f'(1)$ et $f'(-1)$.

   b) Montrer que : $f'(0) = -3$.

   c) En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6. a) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 7

Pour tout entier naturel n, on note K_n le graphe complet à n sommets, c'est-à-dire le graphe à n sommets tel que chacun de ses sommets est relié à tous les autres.

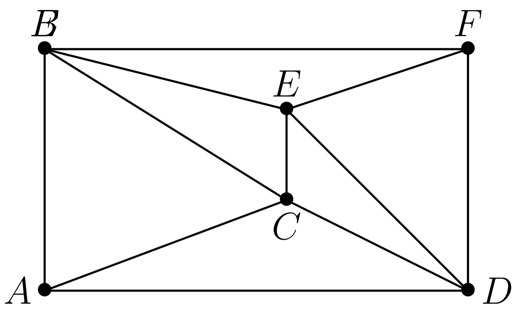
1. Dessiner les graphes K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.
2. Combien ont-ils de sommets ? D'arêtes ?

Exercice 8

1. A quoi ressemble un graphe de nombre chromatique 1 ?
2. Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet ?

Exercice 9

On considère le graphe G suivant :



1. Donner l'ordre de G ainsi que le nombre de ses arêtes.
2. Le graphe G est-il connexe ? Justifier la réponse.
3. Le graphe G est-il complet ? Justifier la réponse.
4. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
5. Justifier que le graphe G n'admet pas un cycle eulérien. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un cycle eulérien ?
6. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
7. Déterminer le nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.