Lycée Remada Tataouine — Prof : M^{r} Hamdi zantour
Année Scolaire : 2017 – 2018 — Classe : 3ème Technique

Série d'exercices N°1

Mathématiques

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, cocher la bonne case.

Questions	**Réponses**
1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_n = \dfrac{5}{6}\,U_{n+1} \end{cases}$	❒ (U_n) est croissante ❒ (U_n) converge vers 0 ❒ (U_n) diverge vers $-\infty$
2. A et B sont deux points distincts et fixes. L'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{BM} = -5$ est	❒ vide ❒ un cercle ❒ une droite
3. La limite de la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{5\,n^3 - 3\,n^2 + 2\,n + 6}{n^2 - 5\,n^3 + 3\,n^5 + 7}$ est égale à	❒ $+\infty$ ❒ -1 ❒ 0
4. Soit z un nombre complexe, on note $M(z)$, $A(1)$ et $B(1+i)$. L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\lvert\bar{z} - 1 + i\rvert = \lvert 1 - z\rvert$ est	❒ le cercle de diamètre $[AB]$ ❒ la médiatrice de $[AB]$ ❒ la droite passant par B

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. a) Ecrire z_1 et z_2 sous leurs formes trigonométriques.

   b) Montrer que : $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   c) En déduire les valeurs exactes de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3

On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+3\,u_n},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{3\,u_n - 2}{3\,u_n + 3}$$

   a) Calculer v_0 et v_1.

   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3. a) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(3\,;-1)$, $B(5\,;1)$ et $C(2\,;1)$.

1. Quelles sont les affixes des points A, B et C et des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. On définit les points D et E par : $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $3\,\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$

   Déterminer l'affixe de chacun des points D et E.
3. Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

Exercice 5

Dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ où $z_A = -1 + 2\,i$, $z_B = -2 - \dfrac{3}{2}\,i$ et $z_C = 2 + \dfrac{3}{2}\,i$

1. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 6

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = -2 - 4\,i$, $z_B = 5 - 2\,i$, $z_C = 4 + 3\,i$ et $z_D = 1 + i$

1. a) Placer les points Placer les points A, B, C et D.

   b) Déterminer l'affixe du point C' symétrique de C par rapport au point D.

   c) Déterminer l'affixe du point A' vérifiant : $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $A'BC'D$?

Exercice 7

Dans le plan complexe, on considère les points B et C d'affixes respectives :

$z_B = 2 + 2\,i\,\sqrt{3}$ et $z_C = 2 - 2\,i\,\sqrt{3}$

1. Vérifier que B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.
2. On considère le point A d'affixe : $z_A = \dfrac{z_B - z_C}{2}$
   a) Calculer z_A puis $|z_A - z_B|$, $|z_A - z_C|$ et $|z_B - z_C|$.
   b) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :
   a) $|z - 1 + i| = |z + 2 - i|$.
   b) $|z + 2 + i| = 2$.
   c) $|i\,z + 1 - i| = |z + 3|$.
   d) $|\bar{z} + 2 + 3\,i| = 3$.
   e) $|i\,\bar{z} + 2 - i| = 5$.
   f) Construire ces ensembles.
2. Donner dans chaque cas une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

Exercice 9

Déterminer les nombres complexes tels que les points M, M' et M'' d'affixes respectives : z, $\dfrac{1}{z}$, $z - 1$ appartiennent à un même cercle de centre O.

Exercice 10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   $z_1 = 4 + 4\,i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 - i\,\sqrt{3}$, $z_4 = 1 + i\,\sqrt{3}$, $z_5 = i - 1$, $z_6 = -4$,
   $z_7 = \sqrt{3} - i$, $z_8 = \sqrt{2}(i - 1)$, $z_9 = i\,\sqrt{3} - 1$ et $z_{10} = -4 + 4\,i$
2. Donner la forme trigonométrique et la forme polaire de chacun de ces nombres complexes.
3. À chaque nombre complexe z_k de la première question, on associe son image M_k dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé. Dessiner avec précision les points M_k.

Exercice 11

Soit $Z \in \mathbb{C}$, On pose $Z = x + i\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la partie réelle $\text{Re}(U)$ et la partie imaginaire $\text{Im}(U)$ du nombre complexe : $U = 3\,Z^2 + Z.\bar{Z} - 6\,i\,\sqrt{2}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3\,Z^2 + Z.\bar{Z} - 6\,i\,\sqrt{2} = 0$.

Exercice 12

Dans le plan complexe, à tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = z.\bar{z} + (1+i)\,z + 3\,\bar{z} - 2$

1. a) Déterminer les affixes z'_A et z'_B des points A' et B' , associés aux points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 + i$ et $z_B = -\,i$.
   b) Déterminer l'affixe z_K du milieu K de $[AB]$.
   c) Déterminer l'affixe $z_{K'}$ du point K' associé à K.
   d) K' est-il le milieu de $[A'B']$?
2. On pose $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ où $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que z' soit réel.
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 13

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. On donne les coordonnées des points A, B et C.
$A(1;\,2\,;3)$, $B(5\,;\,6\,;-1)$ et $C(2\,;\,-1\,;2)$.

1. Donner une représentation paramétrique des droites (AB) et (AC).
2. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).

Exercice 14

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. On considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ définies par leurs représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = -2 - 2\,t_1 \\ y = 2 + 3\,t_1 \\ z = 3 + 2\,t_1 \end{cases} \;;\ t_1 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + 2\,t_2 \\ y = -2 - \,t_2 \\ z = -\,t_2 \end{cases} \;;\ t_2 \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.
2. Donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$

Exercice 15

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :
$A(0\,;\,0\,;2)$, $B(0\,;\,4\,;-0)$ et $C(2\,;\,0\,;0)$.

1. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.
2. a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b) Soit Δ la droite intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ . Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?

3. Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.

   a) Montrer qu'une représentation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'.

   a) Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

   b) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. a) Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

   b) Calculer alors la distance du point O au plan (ABC).

Exercice 16

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1. Dénombrer tous les résultats possibles.
2. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 17

Dans une classe de 32 élève, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1. Quel est le nombre de choix possibles ?
2. Quel est le nombre de choix possibles si l'on impose un garçon et une fille ?
3. Quel est le nombre de choix possibles si l'on impose deux garçon ?

Exercice 18

Un sac contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire successivement au hasard et sans remise 3 jetons du sac.

1. Dénombrer tous les tirages possibles contenant
   a) 3 jetons verts.

   b) au moins un jeton vert.

   c) un seul jeton rouge.

   d) 2 jetons de la même couleur.

   e) au plus 2 jetons verts.
2. Reprendre l'exercice sachant que le tirage est maintenant simultané.