EQUATION DIFFERENTIELLE ☺

1

EXERCICE 1 ☺

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur IR par : $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie et dérivable sur IR est une solution de (E) si et seulement si v - u est une solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

CORRECTION ☺

Soit u la fonction définie par : $u(x) = xe^{-x}$; alors $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ et $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$, donc u est bien une solution de l'équation différentielle (E).

2. (E_0) : $y'+y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. Les solutions de cette équation sont les fonctions : $x \mapsto Ce^{-x}$, C étant un réel quelconque.

3. Une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v' + v = e^{-x}$.
On a vu à la question 1 que u est une telle solution donc que $u' + u = e^{-x}$.
En calculant la différence membre à membre :
$v' - u' + v - u = 0 \Leftrightarrow (v - u)' + (v - u) = 0$,
autrement dit, la fonction v - u est solution de E_0.

4. On a donc pour toute solution v de (E),
$v - u = Ce^{-x} \Leftrightarrow v = u + Ce^{-x} \Leftrightarrow v = xe^{-x} + Ce^{-x} \Leftrightarrow v = (x + C)e^{-x}$, $C \in IR$

5. La solution f_2 prenant la valeur 2 en 0 vérifie
$f_2(0) = (0+C)e^0 = 2 \Leftrightarrow C = 2$.
Conclusion : $f_2(x) = (x + 2)e^{-x}$

EXERCICE 2 ☺

A/ On se propose de résoudre sur IR l'équation différentielle

(E) : $y'-2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1. Montrer que la fonction h définie sur IR par :

$h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$.

Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0

CORRECTION ☺

1)Soit $h(x) = 2xe^{2x} + 1$

Montrons que h est une solution de (E) :

$h'(x) = 4xe^{2x} + 2e^{2x}$; $h'(x) - 2h(x) = 4xe^{2x} + 2e^{2x} - 4xe^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$

Donc h vérifie (E) (est une solution de (E))

2) $y = z + h$

y est une solution de (E) ssi

$z' + h' - 2(z + h) = 2(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow (h' - 2h) + z' - 2z = 2(e^{2x} - 1)$

Puisque h' est une solution de (E) alors : $\boxed{z' - 2z = 0}$

$z' - 2z = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = 2 \Leftrightarrow z = \lambda e^{2x}$

Ce qui donne toute solution y de E est de la forme : $y = \lambda e^{2x} + 2xe^{2x} + 1$

avec λ est un réel.

3) Le théorème du cours (unicité de la condition initiale), nous affirme qu'il existe une et une seul solution de (E) qui s'annule en 0 (unicité de z avec condition initiale en 0)

$g(0)=0 \Rightarrow \lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow g(x)=2xe^{2x}-e^{2x}+1=e^{2x}(2x-1)+1$

EXERCICE 3 ☺ BAC 2009 SC

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 0$

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur IR telles que pour tout x de IR : $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \cos x$.

Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x,

$f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$

d) Déterminer alors l'ensemble E.

CORRECTION ☺

1) Les solutions de l'équation : $y'' + y = 0$ sont de type

$y = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec a et b sont deux réels constantes

2)a) $g'(x) = -\sin(x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -g(\frac{\pi}{2} - x)$ d'où :

$g'(x) + g(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

b) $f'(x) = -f(\frac{\pi}{2} - x)$ donc : $f''(x) = [-f(\frac{\pi}{2} - x)]' = f'(\frac{\pi}{2} - x)$

c) $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$ (d'après ce qui précède) donc :

$f''(x) + f(x) = 0$

d)Soit f un élément de E donc f est une solution de $y'' + y = 0$ d'où :

$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$f'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ d'où :

$f'\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -a\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ donc $b = 0$ par suite $f(x) = a\cos(x)$

$E = \{ a\cos(x) ;$ a est une constante réel $\}$

PROBABILITE ☺

EXERCICE 1 ☺

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants:

G."le client achète une tablette gagnante"

U."le client gagne exactement une place de cinéma"

D."le client gagne exactement deux places de cinéma"

a) Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client. Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

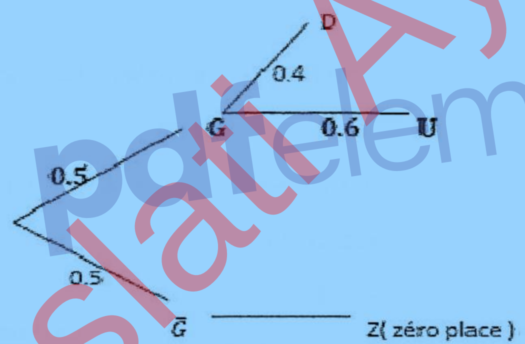
a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

CORRECTION ☺

Voila un arbre qui résume les différentes situations



1° a/ D'après l'arbre :

$P(G) = \frac{1}{2}$; $P_G(U) = 0,6$; $P_G(D) = 0,4$

b / $P_G(U) = \frac{P(U \cap G)}{P(G)} = P(U \cap G) \times 2 \Rightarrow P(U \cap G) = \frac{1}{2} P_G(U)$

Or U et $\overline{G}$ sont incompatible et G ; $\overline{G}$ forment une partition de Ω :

donc $P(U) = P(U \cap G) \Rightarrow P(U) = \frac{1}{2} \times 0,6 = 0,3$

c° / Variable aléatoire X. ; $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P(X = 0) = \frac{1}{2} . 1 = \frac{1}{2}$; $P(X = 1) = 0,3$

$P(X=2) = P(D/G) \times P(G) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$

x_i	0	1	2
P_i	0,5	0,3	0,2

$E(X) = 0.P(X=0) + 1\,P(X=1) + 2.P(X=2) = 0,3 + 2\,.0,2 = 0,7$

2° / a/ A " le client ne gagne aucune place"

Il y a une seule possibilité c'est qu'il ne gagne pas le 1er et le second jour c'est avoir le couple ($\overline{G}$; $\overline{G}$) donc $P(A) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

b°/ L'événement considéré est $\overline{A}$ donc la probabilité d'avoir " au moins il gagne une place" es 0.75.

c °/ Soit C " il gagne exactement deux places de cinéma".

C " est la réunion des événements suivants " (Z , D) ; (D,Z) ; (U , U)

donc

P(C) = 0.5X0.5X0.4 + 0.5X0.4X0.5 + 0.5X0.6X0.5 = 0.29

EXERCICE 2 ☺

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec λ> 0)

Toutes les probabilités seront données à10^{-3} prés

1. Sachant que p(X > 10) = 0,286, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} prés de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.

Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

CORRECTION ☺

Rappelons que : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

1° / $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt$

$P(X > 10) = 1 + \left[e^{-\lambda t}\right]_0^{10} = 0.286 = e^{-10\lambda}$

$\Rightarrow \lambda.(-10) = \ln(0,286)$ donc : $\lambda = \frac{\ln(0286)}{-10} = \frac{1}{8}$

2) $P(X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-0,5.\lambda} = 1 - e^{-0,0625}$.

3) $P_{(X>8)}(X > 10) = \frac{P(X>10)}{P(X>8)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0.25}$

4/ or $P(X>10) = 0.286$

Soit A " au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans "

$P(A) = 1 - (1 - 0,286)^{15} = 1 - (0,714)^{15}$

5/ $P(A) = 1 - (0,714)^n$ avec n est le nombre des oscilloscopes commandés

$1 - (0,714)^n > 0.999 \Rightarrow 0,001 > (0.714)^n \Rightarrow \ln(10^{-3}) > n\ln(0.714)$

$n > \dfrac{\ln(10-3)}{\ln(0.714)}$ donc $n > 21$