EXERCICE 1 ☺2013 PRINCIPALE

1

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x=3$, $x=5$ et $y=\ln 3$. On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de E.

1) Hachurer E.

2) a) Vérifier que $f(5)=2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5,\ln 3)$ et $(3,2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3\le A\le 2\ln 3$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3,+\infty[$.

4) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbre représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Tracer la courbe C_g.

5) Soit E' la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x=\ln 3$, $x=2\ln 3$ et $y=5$. On désigne par A' l'aire (en unité d'aire) de E'.

a) Hachurer E'.

b) Montrer que $A'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3,+\infty[$, $g(x)=\dfrac{e^x+9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$ et en déduire la valeur de A.

CORRECION ☺

1) Voir figure.

Bon courage

2) a) $f(5)=\ln\left(5+\sqrt{25-9}\right)=\ln(9)=\ln\left(3^2\right)=2\ln 3.$

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ}=MP\times PN=(5-3)\left(f(5)-\ln 3\right)=2(2\ln 3-\ln 3)=2\ln 3.$

$$A_{MPN}=\frac{MP\times PN}{2}=\frac{2\ln 3}{2}=\ln 3.$$

d) $A_{MPN}\le A\le A_{MPNQ}$ donc $\ln 3\le A\le 2\ln 3.$

3) a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f([3,+\infty[)=\left[f(3),\lim\limits_{+\infty} f\right[=[\ln 3,+\infty[.$

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y=x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3,0)$, $Q'(2\ln 3,0)$, $N'(2\ln 3,5)$ et $P'(\ln 3,5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle M'Q'N'P' et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\ln 3$ et $x=2\ln 3$.

$A'=A_{M'Q'N'P'}-B$. Or $A_{M'Q'N'P'}=M'P'\times M'Q'=5(2\ln 3-\ln 3)=5\ln 3$ et $B=\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$, on en déduit que $A'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx.$

6) a) Pour tout $x\in[\ln 3,+\infty[$ et $y\in[3,+\infty[$

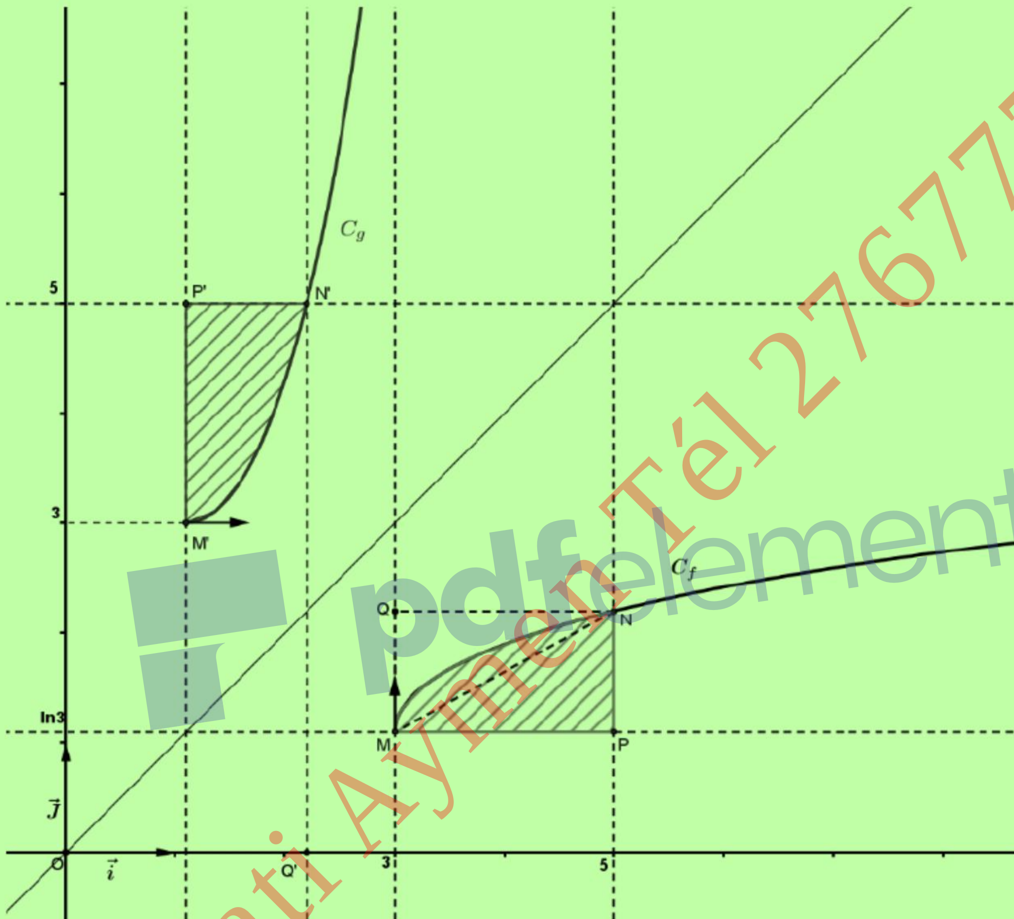
$$g(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x\Leftrightarrow \ln\left(y+\sqrt{y^2-9}\right)=x\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-9}=e^x\Leftrightarrow \sqrt{y^2-9}=e^x-y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2-9}=e^x-y\Leftrightarrow \begin{cases}y^2-9=\left(e^x-y\right)^2\\ e^x\ge y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y^2-9=e^{2x}-2ye^x+y^2\\ e^x\ge y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2ye^x=e^{2x}+9\\ e^x\ge y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^{2x}+9}{2e^x}\\ e^x\ge y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{e^x+9e^{-x}}{2}\\ e^x\ge y\end{cases}$$. On en déduit que pour tout

b) $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^{x}+9e^{-x}}{2}dx = \left[\frac{e^{x}-9e^{-x}}{2}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4$ donc $A' = (5\ln 3 - 4)u.a$ et puisque E

et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4)u.a.$



EXERCICE 2 ☺2010 CONTROLE

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé (O, i, j), la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1\ ,\ 1\ [$. Les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives x = – 1 et x = 1 sont les asymptotes à $(\mathscr{C})$. La droite (T) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

1) En utilisant le graphique déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Soit g la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.

3) Sachant que l'expression de g est de la forme $g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

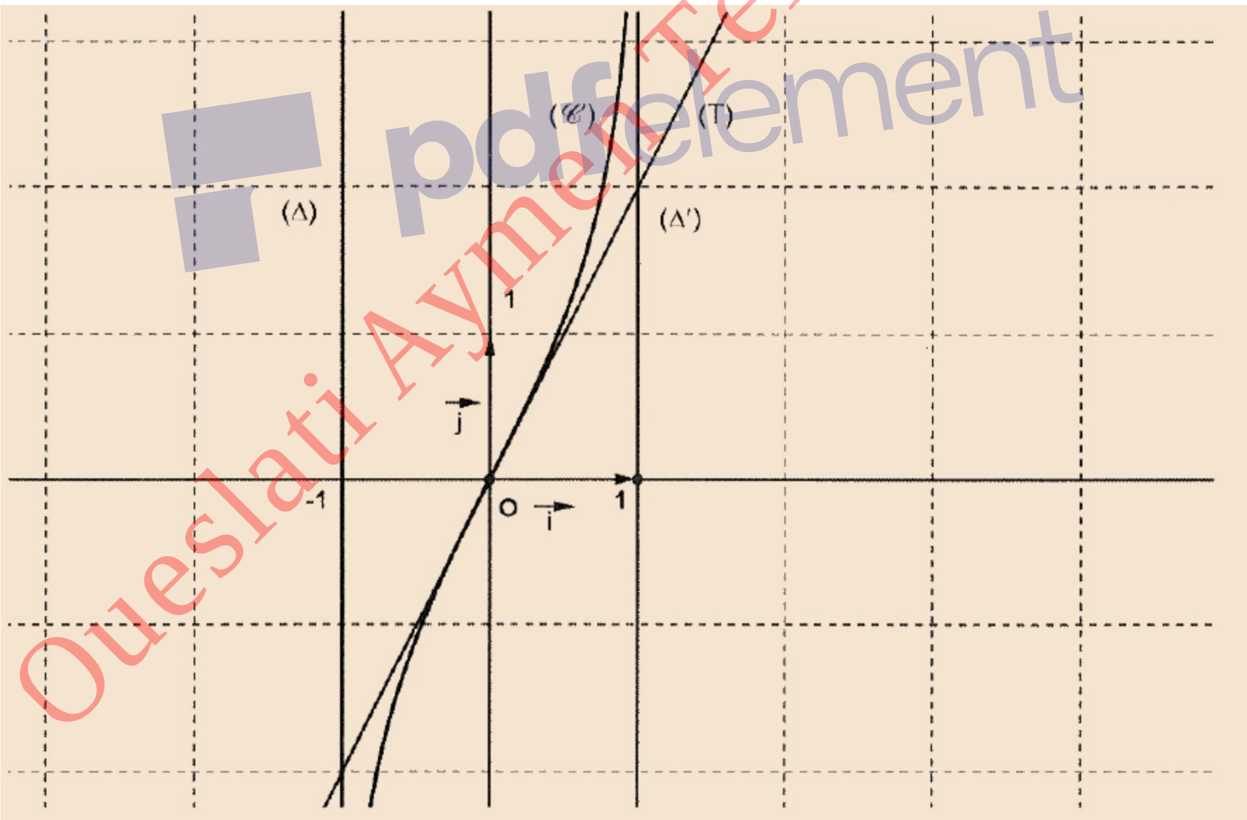
4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)dx$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

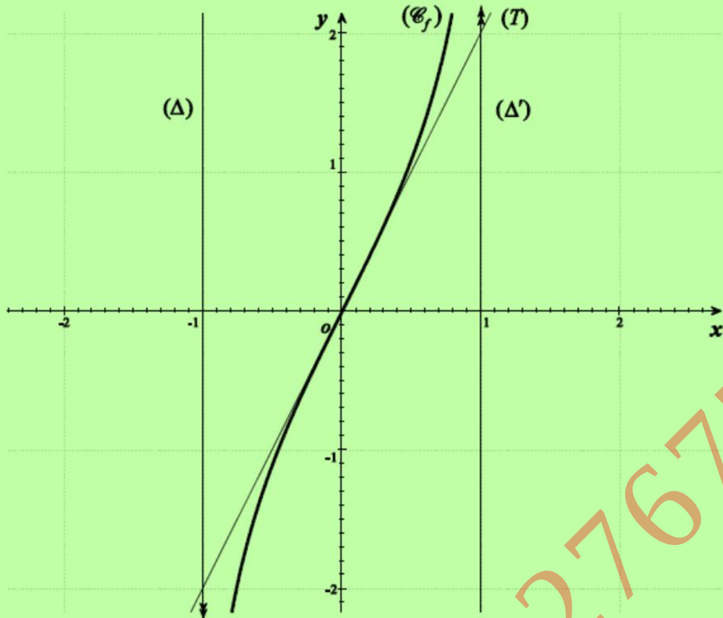
a) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x)dx$.

b) En déduire $\mathscr{A}$.



CORRECION ☺

1°)



$f(0)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

$f'(0)=2$: lecture graphique de la pente de la droite (T) , tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point O

2°) a°) $g(0)=0$: g étant la fonction réciproque de f , on a l'équivalence

$f(x)=y \iff g(y)=x$.

$g'(0)=\frac{1}{2}$: formule de dérivée d'une réciproque : $g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$.

2°) b°) Le tracé est jugé sur la présence des quatre éléments suivant :

- Tracé correct de deux asymptotes horizontales d'équations cartésiennes $y=1$ et $y=-1$
- Tracé correct d'une droite (T') tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point O , de pente $\frac{1}{2}$.
- Tracé correct de l'allure de $(\mathscr{C}_g)$

Construction à faire ☺

3°) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\frac{e^x(e^x+b)-e^x(e^x+a)}{(e^x+b)^2}=\frac{(b-a)e^x}{(e^x+b)^2}$.

D'après les résultats établis en **2°) a°)** on a :

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1+a}{1+b}=0 \\ \frac{b-a}{(1+b)^2}=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 1+a=0 \\ 2(b-a)=(1+b)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ 2(b+1)=(1+b)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Enfin , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

4°) a°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

4°) b°) $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \dfrac{1}{e^x+1}\,dx$

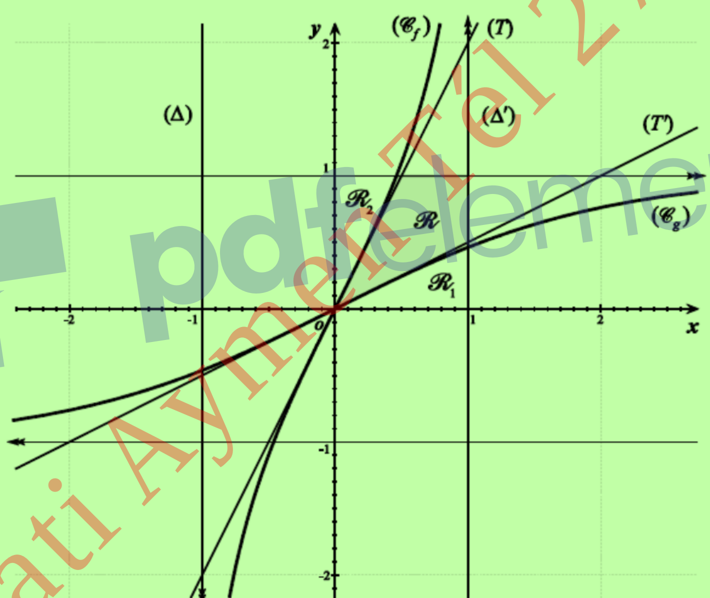
$= \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$, d'après **4°) a°)** .

$= \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 - \left[-\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 = \left[\ln(e^x+1)+\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 = \left[\ln(e^x+1)+\ln(e^x+1)-x\right]_0^1$

$= \left[2\ln(e^x+1)-x\right]_0^1 = 2\ln(e+1)-1-2\ln 2$

$= 2\ln(e+1)-2\ln 2-1$

5°) a°) L'aire $\mathscr{A}$ demandé est celle de la région $\mathscr{R}$ du plan, décrite dans l'énoncé, et hachurée dans la figure suivante :



L'aire $\mathscr{A}$ de cette région $\mathscr{R}$, est celle du carré unité , duquel on soustrait les deux aires des deux régions $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ définies par :

$\mathscr{R}_1$: domaine limité par les droites d'équations respectives $y=0$ et $x=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

$\mathscr{R}_2$: domaine limité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

On a ainsi : $\mathscr{A}(\mathscr{R}) = 1-\left[\mathscr{A}(\mathscr{R}_1)+\mathscr{A}(\mathscr{R}_2)\right]$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\mathscr{A}(\mathscr{R}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{R}_1) = \int_0^1 g(x)\,dx$.

On en déduit alors que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathscr{R}) = 1-2\mathscr{A}(\mathscr{R}_1) = 1-2\int_0^1 g(x)\,dx$.

5°) b°) On a : $\mathscr{A} = 1-2\int_0^1 g(x)\,dx = 1-2\left[2\ln(e+1)-2\ln 2-1\right] = 3+4\ln 2-4\ln(e+1)$ $(\,ua\,)$

EXERCICE 3 ☺ CONTROLE 2014

Lors d'une étude vétérinaire faite sur les vaches d'une région agricole, on a remarqué la présence d'une maladie M et que la probabilité qu'une vache soit atteinte par cette maladie est égale à 0,1.

Un fermier de cette région possède un troupeau de 20 vaches.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre de vaches de ce troupeau atteintes par la maladie M et on considère les deux événements suivants :

   A : " Aucune vache de ce troupeau n'est atteinte par la maladie M "

   B : " Au moins une vache de ce troupeau est atteinte par la maladie M ".

   a) Justifier que $p(A)=(0,9)^{20}$.

   b) En déduire p(B).

   c) Déterminer le nombre moyen de vaches de ce troupeau qui sont atteintes par la maladie M.

2) Pour dépister la maladie M chez les 20 vaches du fermier, on procède ainsi :

   On effectue d'abord une analyse sur un échantillon contenant un mélange du lait des 20 vaches. Si le résultat est positif, on effectue une analyse du lait de chaque vache.

   On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'analyses possibles effectuées.

   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'espérance E(Y) de la variable Y.

CORRECTION ☺

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.

   La loi de X est donnée par $p(X=k)=C_{20}^{k}(0.1)^{k}(0.9)^{20-k}$, $k\in\{0,1,........,20\}$.

   $p(A)=p(X=0)=(0.9)^{20}$.

   b) $p(B)=1-p(\overline{B})=1-p(A)=1-(0.9)^{20}$.

   c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est $E(X)=20\times0.1=2$.

2) a) les valeurs prises par Y sont $\{1,21\}$.

   $p(Y=1)=p(A)=(0.9)^{20}$.

   $p(Y=21)=p(B)=1-(0.9)^{20}$.

   La loi de Y est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	21
$p(Y=y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1-(0.9)^{20}$

b) $E(Y)=\sum_{i=1}^{2} y_i p(Y=y_i)=1\times(0.9)^{20}+21\times\left(1-(0.9)^{20}\right)=18.56.$

EXERCICE 4 ☺ PRINCIPALE 2012 ☺

Le centre National de la Transfusion sanguine a diffusé le tableau ci-contre donnant la répartition des groupes sanguins en Tunisie.

Groupe	A	B	AB	O
Pourcentage	31%	18%	5%	46%

I) 1) Quelle est la probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O ?

2) Quatre donneurs se présentent dans un centre de transfusion sanguine.

a/ Quelle est la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O?

b/ Quelle est la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs?

II) Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.

En Tunisie, 9% des individus du groupe O sont de Rhésus négatif.

1) Montrer que la probabilité qu'un tunisien soit un donneur universel est 0.0414.

2) Dans un centre de transfusion sanguine, n donneurs se présentent.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi les n donneurs.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X.

b/ Déterminer l'espérance de X en fonction de n.

c/ Déterminer le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 donneurs.

CORRECTION ☺

1) La probabilité qu'un tunisien ait un sang du groupe O est 0.46.

2) a) Soit P_1 la probabilité q'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$P_1 = C_4^1.(0.45)^1.(1-0.46)^3 = 0.29.$$

b) Soit P_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez ces donneurs

$$P_2 = p(A).p(B).p(AB).p(O).4! = 0.31 \times 0.18 \times 0.05 \times 0.46 \times 24 = 0.03$$

II)

1) $p = p(O \cap Rh\_) = p(Rh\_/O).p(O) = 0.09 \times 0.46 = 0.0414.$

2) a) X est une variable aléatoire qui suit la loi binomial de paramètres n et $p = 0.0414$.

$p(X = k) = C_n^k.(0.0414)^k \times (0.9586)^{n-k}$ $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

b) $E(X) = n \times p = n \times 0.0414$

c) $n = 5000$; $E(X) = 5000 \times 0.0414 = 207$

Donc le nombre moyen des donneurs universels parmi 5000 est 207.

EXERCICE 5 ☺ PRINCIPALE 2012 ☺

A l'instant $t = 0$ (t exprimé en heures) un médecin injecte à un patient une dose de 1.4mg d'une substance médicamenteuse qui n'est pas présente dans le sang. Cette substance se répartit instantanément dans le sang, ensuite elle est progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance (en mg) présente dans le sang à l'instant t, $(t \geq 0)$.

On admet que la fonction $Q : t \mapsto Q(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + (0.115)y = 0$.

1) Résoudre l'équation (E).

2) a/ Justifier que $Q(t) = 1.4e^{-0.115t}$, $t \geq 0$.

b/ Donner le sens de variation de la fonction Q.

c/ Résoudre dans $[0, +\infty[$ l'équation $Q(t) = 0.7$; la solution sera arrondie à l'unité.

3) Pour une efficacité optimale de ce médicament, sa quantité présente dans le sang doit être comprise entre 0.7mg et 1.4mg .

Expliquer pourquoi le médecin prescrit à ce patient une injection de 0.7mg chaque six heures.

CORRECTION ☺

1) $y(t) = k.e^{-0.115t}$; $k \in IR$

2) a) $Q(0) = 1.4$ alors $k = 1.4$ d'où $Q(t) = 1.4e^{-0.115t}$, $t \geq 0$.

b) $Q'(t) = -0.161e^{-0.115t} < 0$ pour tout réel $t \geq 0$.

t	0	+∞
Q'(t)	—	
Q(t)	1.4 ↘	0

c) $Q(t) = 0.7 \Leftrightarrow 1.4e^{-0.115t} = 0.7 \Leftrightarrow e^{-0.115t} = \frac{0.7}{1.4} \Leftrightarrow -0.115t = \ln(0.5) \Leftrightarrow t = 6$

3) $0.7 \leq Q(t) \leq 1.4$ signifie $0 \leq t \leq 6.027.$