Prof:Oueslati Aymen Probabilités BAC 2018
Tél 27677722 "exercices corrigés " Facebook:www.facebook.com/MathTewa

Exercice 1 ☺ **Variables aléatoires**

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessus :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)$ c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})$
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type, arrondi au millième, de la variable $\mathcal{X}$.

Correction ☺

1. Ce tableau représente une loi de probabilité car toutes ces valeurs sont des nombres appartenant à l'intervalle $[0;1]$ et car :
   $0{,}15+0{,}24+0{,}35+0{,}26=1$
2. a. On a : $\{\mathcal{X}\geqslant 2\}=\{\mathcal{X}=2\}\cup\{\mathcal{X}=3\}$
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 2)=0{,}35+0{,}26=0{,}61$

   b. On a : $\{\mathcal{X}<2\}=\{\mathcal{X}=0\}\cup\{\mathcal{X}=1\}$
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}<2)=0{,}15+0{,}24=0{,}39$

   c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=3\})=0{,}24+0{,}26=0{,}5$

3. On a :

- $E(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$

$= 0\times0{,}15 + 1\times0{,}24 + 2\times0{,}35 + 3\times0{,}26$

$= 0 + 0{,}24 + 0{,}7 + 0{,}78 = 1{,}75$

- $V(\mathcal{X}) = \sum_{i=1}^{4} [x_i - E(\mathcal{X})] \cdot \mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$

$= (0\text{-}1{,}72)^2 0{,}15 + (1\text{-}1{,}72)^2 0{,}24 + (2\text{-}1{,}72)^2 0{,}35 + (3\text{-}1{,}72)^2 0{,}26$

$= (-1{,}72)^2 \cdot 0{,}15 + (-0{,}72)^2 \cdot 0{,}24 + (0{,}28)^2 \cdot 0{,}35 + (1{,}28)^2 \cdot 0{,}26$

$= 0{,}44376 + 0{,}124416 + 0{,}02744 + 0{,}425984 = 1{,}0216$

- $\sigma(\mathcal{X}) = \sqrt{V(\mathcal{X})} \simeq 1{,}011$

Exercice 2 ☺ variables aléatoires

Une urne contient 50 boules blanches, 25 boules noires et 25 boules rouges. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue 3 tirages indépendants et avec remise.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   A : "*les trois boules tirées sont blanches*".

2. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   B : "*aucune des boules tirées est blanches*".

3. a. Déterminer la probabilité de l'évènement :
   C_1 : "*La première boule tirée est blanche ; les deux autres ne sont pas blanches*".

   b. En déduire la probabilité de l'évènement :
   C : "*une seule des boules tirées est blanches*".

4. En déduire la probabilité de l'évènement :
   D : "*deux boules tirées sont blanches et une boule n'est n'est pas blanche*".

5. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées :

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

b. Déterminer l'espérance de la variable $\mathcal{X}$.

Correction ☺

1. La probabilité de tirer une boule blanche est de :

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Les trois tirages étant indépendant, on a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

2. La probabilité de tirer une boule noire ou rouge est de :

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Les tirages étant indédendants et avec remise, on a :

$$\mathcal{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

3. a. Les trois tirages sont indépendants et sans remise, on a :

$$\mathcal{P}(C_1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

b. On définit aussi les évènements C_2 et C_3 représentant les évènements où respectivement la seconde et la troisième boule blanche est la seule boule blanche tirée :

Les tirages étant tous similaires et indépendants, on en déduit l'égalité suivante des probabilités :

$$\mathcal{P}(C_1) = \mathcal{P}(C_2) = \mathcal{P}(C_3)$$

Et on a la relation suivante sur les évènements :

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

où ces trois évènements sont disjoints.

On a :

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = \mathcal{P}(C_1) + \mathcal{P}(C_2) + \mathcal{P}(C_3)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

4. Considérons l'évènement :

D_1 : "*La première boule est noire et les deux autres ne sont pas noires*"

On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(D_1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir deux boules blanches est de :

$$\mathcal{P}(D) = 3 \cdot \mathcal{P}(D_1) = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

5. **a.** La variable aléatoire $\mathcal{X}$ prend les valeurs 0, 1, 2, 3.

On a les égalités suivantes dévènements

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \mathcal{P}(B) = \frac{1}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \mathcal{P}(C) = \frac{3}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2) = \mathcal{P}(D) = \frac{3}{8}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \mathcal{P}(A) = \frac{1}{8}$

b. L'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ a pour valeur :

$$E(\mathcal{X}) = 0 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) + 1 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) + 2 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=2) + 3 \times \mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$$
$$= \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Exercice 3 ☺Arbre de probabilité

Un jeu consiste à lancer quatre fois successivement une pièce de monnaie équilibrée. A chaque lancer, on note la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.

b. En admettant que les sorties de cette expérience sont équiprobables, donner la probabilité d'un événement élémentaire.

On associe à chaque sortie de cette expérience aléatoire un gain :

- le gain est de 0€ si le côté face n'apparait pas ;
- le gain est de 1€ si le côté face apparait 1 fois ;
- le gain est de 2€ si le côté face apparait 2 fois ;
- le gain est de 4€ si le côté face apparait 3 fois ;
- le gain est de 10€ si le côté face apparait 4 fois ;

2. Pour chaque valeur prise par la variable aléatoire $\mathcal{X}$, associer sa probabilité.

3. A chaque sortie de cette expérience, on note $\mathcal{X}$ le gain obtenu.
   - L'événement "*le gain obtenu est égal à 4€*" se note $\{\mathcal{X}=4\}$.
   - L'événement "*le gain est supérieur ou égal à 4€*" se note $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$.

   Déterminer les probabilités des événements ci-dessous

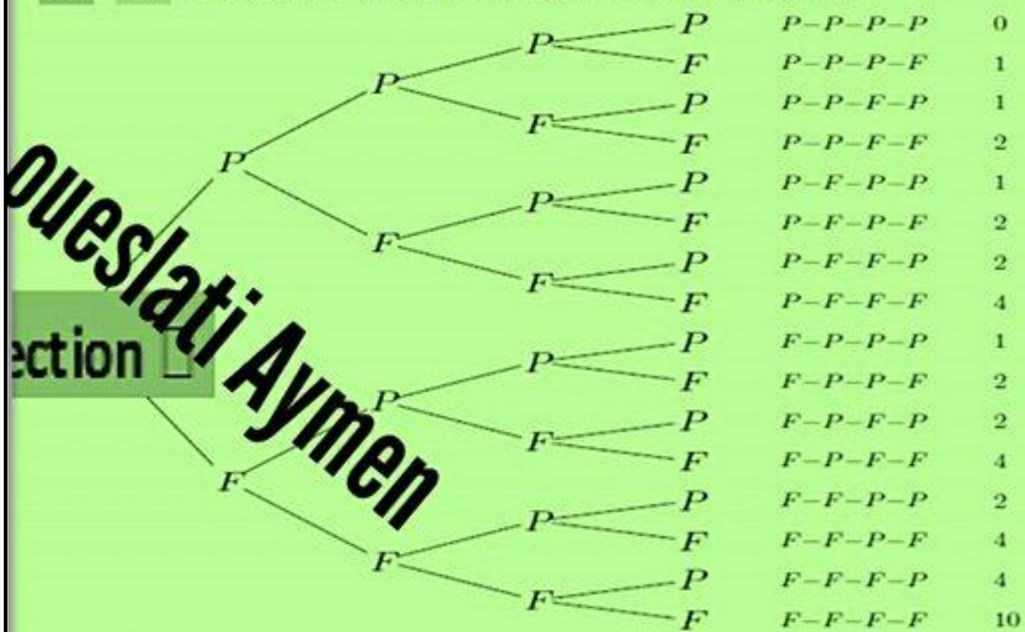
   a. $\{\mathcal{X}=10\}$ b. $\{\mathcal{X}=4\}$ c. $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$

4. Compléter le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$					

Correction 😊

1. **a.** On obtient l'arbre de choix ci-dessous :



b. Cette expérience comporte 16 issues distinctes. Ainsi, en supposant l'équiprobabilité de cette expérience, chaque évènement élémentaire possède une probabilité de $\frac{1}{16}$.

2. La représentation de l'arbre de choix indique, dans sa partie droite, le gain associé à chacune des issues élémentaires de cette expérience.

3. **a.** L'évènement $\{\mathcal{X}=10\}$ est composé de 1 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=10) = \frac{1}{16}$$

b. L'évènement $\{\mathcal{X}=4\}$ est composé de 4 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

c. L'évènement $\{\mathcal{X}\geqslant 4\}$ est composé de 5 évènement élémentaire. On a la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 4) = \frac{5}{16}$$

4. On a le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 4 ☺Formule de probabilité totale ☹

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :

- S'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A ;
- Sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement "*le joueur obtient une boule rouge*". Montrer que $\mathcal{P}(R)=0{,}15$
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes *(c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve les urnes retrouvent leur composition initiale).*

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G)\geqslant 0$

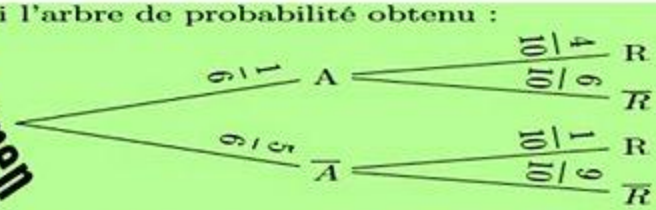
Correction

Partie A

1. Pour modéliser cette expérience, on considère les deux événements suivants :

- A : "*On obtient* 1 *avec le dé*" ;
- R : "*La boule tirée est rouge*".

Voici l'arbre de probabilité obtenu :



D'après l'arbre de probabilité, on obtient les deux probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(A \cap R) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{4}{60}$
- $\mathcal{P}(\overline{A} \cap R) = \mathcal{P}(\overline{A}) \times \mathcal{P}_{\overline{A}}(R) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{60}$

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. La formule des probabilités totales permettent d'obtenir la probabilité de l'évènement R :
$\mathcal{P}(R) = \mathcal{P}(A \cap R) + \mathcal{P}(\overline{A} \cap R) = \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} = 0{,}15$

2. Déterminons les deux probabilités conditionnelles suivantes :

- $\mathcal{P}_R(A) = \dfrac{\mathcal{P}(R \cap A)}{\mathcal{P}(R)} = \dfrac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{4}{60} \times \frac{60}{9} = \frac{4}{9}$
- $\mathcal{P}_R(\overline{A}) = \dfrac{\mathcal{P}(R \cap \overline{A})}{\mathcal{P}(R)} = \dfrac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{5}{60} \times \frac{60}{9} = \frac{5}{9}$

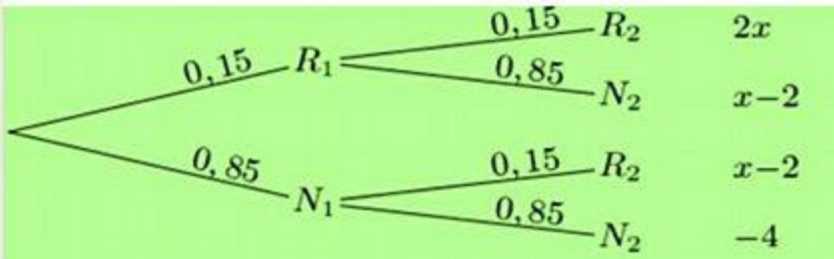
Ayant obtenu une boule rouge, la probabilité est plus grande d'avoir tirée cette boule à partir de l'urne B.

Partie B

1. Le tirage de la boule se répète deux fois, ainsi le joueur peut :

- tirée aucune boule rouge auquel cas il a perdu 4 euros ;
- tirée une seule boule rouge auquel cas il a gagné x euro et il en a perdu 2 euros.
- tirée deux boules rouges auquel cas il a gagné $2x$ euros.

Voici l'arbre de probabilité associé aux tirages des deux boules ; on a indiqué sur la droite le gain associé à chacun des chemins :



On obtient la loi de probabilité de la variable aléatoire G :

k	-4	$x-2$	$2x$
$\mathcal{P}(G=k)$	0,7225	0,255	0,0225

2. L'espérance de la variable aléatoire se calcule par :

$$E(G)=(-4)\times\mathcal{P}(G=-4)+(x-2)\times\mathcal{P}(G=x-2)+2x\times\mathcal{P}(G=2x)$$
$$= -4\times0{,}7225+(x-2)\times0{,}255+2x\times0{,}0225$$
$$= -2{,}89+0{,}255x-0{,}51+0{,}045x=0{,}3x-3{,}4$$

3. Résolvons l'équation suivante :

$$E(G)\geqslant 0$$
$$0{,}3x-3{,}4\geqslant 0$$
$$0{,}3x\geqslant 3{,}4$$
$$x\geqslant \frac{3{,}4}{0{,}3}$$

Ainsi, l'espérance de ce jeu positive ou nulle si x est supérieur ou égal à $\frac{34}{3}$.

Exercice 5 ☺loi binomial ☺

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs. U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « Obtenir deux jetons noirs »

B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geqslant 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

a – Donner la loi de probabilité de X.

b – Calculer son espérance et sa variance.

c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Correction ☺

1) $p(A) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ $\quad p(B) = \frac{2\times3}{25}+\frac{3\times2}{25} = \frac{12}{25}$ $\quad p(C) = \frac{3\times3}{25}+\frac{2\times2}{25} = \frac{13}{25}$

2) a – On choisit l'urne U_1 et on tire un jeton blanc ou on choisit l'urne U_2 et on tire un jeton blanc.

Soient : D l'événement « tirer un jeton blanc » , U_1 : « tirer un jeton de l'urne U_1 » et

U_2 : « tirer un jeton de l'urne U_2 » .

on a D= $(U_1 \cap D) \cup (U_2 \cap D)$ avec $(U_1 \cap D)$ et $(U_2 \cap D)$ incompatibles.

la probabilité de tirer un jeton blanc est donc

$p(D) = p(U_1\cap D) + p(U_2\cap D) = p(U_1).p(D/U_1) + p(U_2).p(D/U_2) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$

$= \frac{1}{2}$.

b) $p(U_1/D) = \frac{p(U_1\cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

3) $X(\Omega) = \{ 1 , 2, \ldots , n \}$. X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$.

a) k ∈ { 1 , 2, … , n } : $p(X = k) = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ $V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

c) $p(X = 2) = C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $C_n^2 \geq 1$ alors $p(X = 2) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 6 ☺ loi exponentielle ☺

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) a) Déterminer λ pour que $p(X \geq 8) = 0.28$

b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.

c) Déterminer T tel que $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$.

2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.

3) Une personne achète n appareils électroniques identiques ($n \in \mathbb{N}^*$) du modèle précédent.

On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer, en fonction de n, la probanilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 8 ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0.998$.

Correction ☺

1) a) $p(X \geq 8) = 0.28 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0.28 \Leftrightarrow -8\lambda = \ln(0.28) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.28)}{8} = 0.159$

b) 3 mois en années est $\frac{1}{4}$ année

$P(X \leq \frac{1}{4}) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\lambda} = 1 - e^{-\frac{0.159}{4}} = 0.039$

c) $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-\lambda T} = 4e^{-\lambda T} \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{5} = 0.2 \Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0.2) \Leftrightarrow T = -\frac{\ln(0.2)}{\lambda} = -\frac{\ln(0.2)}{0.159} \simeq 10,12$$

2) $$p(X \geq 10 | X \geq 6) = \frac{p((X \geq 10) \cap (X \geq 6))}{p(X \geq 6)} = \frac{p(X \geq 10)}{p(X \geq 6)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-6\lambda}} = e^{-4\lambda} = e^{-4\times 0.159} \simeq 0,529$$

3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils ayant une durée de vie $X \geq 8$.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(X \geq 8) = 0.28$

a) $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0,72)^n$.

b) $p_n \geq 0.998 \Leftrightarrow 1 - (0,72)^n \geq 0,998 \Leftrightarrow (0,72)^n \leq 0,002 \Leftrightarrow n\ln(0,72) \leq \ln(0,002)$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.002)}{\ln(0.72)} \simeq 18.91 \Leftrightarrow \text{n est un entier supérieur ou égal à 19.}$$