qcm ln/expo/proba

Y.BOULILA

Qcm

Fonction logarithme népérien

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$

E1 Soit les expressions suivantes, où x désigne un réel:

$f(x) = \ln(x-2) \quad g(x) = \ln(1+x^2) \quad h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

A ☐ f(x) et g(x) ont un sens pour tout x.

B ☐ h(x) a un sens si $x > 0$.

C ☐ $f(3) = 0$.

D ☐ $h(e) = e$.

E ☐ pour tout $x > 2$, on a : $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \ln\dfrac{x-2}{1+x^2}$.

E2 Simplifier des écritures

A ☐ $\ln 2 + \ln\dfrac{1}{2} - \ln(e^{-2}) = 2$.

B ☐ $\ln(3^2) + \ln 3 - \ln\sqrt{3} = 2\ln 3$.

C ☐ $\dfrac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})} - \ln 2e = 1 - \ln 2$.

D ☐ $\ln 125 - \ln 81 - \ln\dfrac{3}{5} + 2\ln\sqrt{243} = 4\ln 5 - \ln 3$.

E☐ $\ln[(\sqrt{2}-1)^{142}]+\ln[(\sqrt{2}+1)^{142}]=0$.

E3 l'équation ou l'inéquation ...

A☐ $\ln(x+1)=\ln(2x+3)$ a pour unique solution -2.

B☐ $(x+2)\ln(x+2)=0$ a pour unique solution -1.

C☐ $\ln\dfrac{x+1}{x-3}\geq 0$ a pour ensemble solution $S=]3;+\infty[$.

D☐ $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$ a pour unique solution e^3.

E☐ $\ln(2-x)+1\geq 0$ a pour ensemble solution $S=]-\infty;2[$.

E4 Calcul de limites

A☐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^3)=+\infty$

B☐ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=0$

C☐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$

D☐ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty$

E☐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}=+\infty$

E5 Calcul de dérivées

A☐ $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}+\ln x$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=\dfrac{1+x}{x^2}$.

B☐ $f:x\mapsto x\ln x-x$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=\ln x$.

C☐ $f: x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

D☐ $f: x \mapsto \ln(x^2+x-2)$ définie sur $]-\infty;-2[$ et $]1;+\infty[$ est dérivable sur ces intervalles et $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

E☐ $f: x \mapsto \ln\dfrac{x+1}{x+3}$ définie sur $]-\infty;-3[$ et $]-1;+\infty[$ est dérivable sur ces intervalles et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$.

E6 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$

A☐ f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et f'(x) a le signe de $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

B☐ sur $]0;+\infty[$ g' a le signe de x-1.

C☐ sur $]0;+\infty[$ g admet un maximum égal à 3.

D☐ f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

E☐ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[1;2]$.

E7 Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par :
$f(x) = x^2\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

A☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

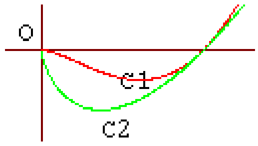
B☐ f n'est pas dérivable en 0.

C☐ la courbe de f admet à l'origine du repère une demi-tangente verticale.

D☐ le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{e^{-1}}{2}$	↗	$+\infty$

E☐ la courbe de f a l'allure de la courbe C_2 ci-dessous.



E8 Soit f définie sur $]0;1[$ par $f(x)=\ln x-\ln(1-x)$
et (C) sa courbe représentative.

A☐ Les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ sont asymptotes à (C).

B☐ (C) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$.

C☐ Une équation de la tangente à (C) en A est $y=x-2$.

D☐ Pour tout x de $]0;1[$ on a $f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)$.

E☐ Le point A est un centre de symétrie pour (C).

E9 Soit $f:x\mapsto\dfrac{x}{1+\ln x}$ et D son ensemble de définition.

A☐ $D=]0;+\infty[$.

B☐ Pour tout x de D: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$.

C☐ f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

D☐ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.

E☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

E10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$

A☐ La courbe de f admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

B☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

C☐ Pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x)=\frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

D☐ Pour tout x de $[0;1]$ on a $f(x)\geq 0$.

E☐ L'équation $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $[0;1]$.

Qcm

Fonction exponentielle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

E1 Simplifier des écritures

A☐ $e^{\ln 2}.e^{\ln 5}=7$.

B☐ $e^{-\ln 3}=3$.

C☐ $e^{\frac{1}{2}\ln 8}=2\sqrt{2}$.

D☐ $e^{-3\ln\frac{1}{2}}=8$.

E☐ $\frac{e^{2+\ln 32}}{e^{3+\ln 8}}=4e$.

E2 L'équation ou l'inéquation

A ☐ $e^x = 7$ a pour unique solution $x = \ln 7$.

B ☐ $e^{2x} + 1 < 0$ n'a pas de solution.

C ☐ $e^{-x+2} = e^{2x-1}$ a pour unique solution $x = 1$.

D ☐ $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ a pour ensemble solution $S = \{0;\ \ln 6\}$.

E ☐ $e^{x+1} \geq \dfrac{2}{e^x}$ a pour ensemble solution $S = [\ \dfrac{-1+\ln 2}{2};\ +\infty\ [$.

E3 Calcul de limites

A ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$.

B ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} 3xe^{-x} = 0$.

C ☐ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{3x} = +\infty$.

D ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 3}{e^{2x} + 1} = 1$.

E ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x) = 0$.

E4 Calcul de dérivées

A ☐ $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = e^x$.

B ☐ $f : x \mapsto e^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = 2xe^{2x}$.

C ☐ $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ définie dans $\mathbb{R} - \{0\}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

D □ $f : x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}}$ définie sur ¡ est dérivable sur ¡ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{2x}}}$.

E □ $f : x \mapsto \ln\dfrac{1}{e^x+2}$ définie sur ¡ est dérivable sur ¡ et $f'(x) = \dfrac{-e^x}{e^x+2}$.

E5 Soit f définie sur ¡ par $f(x) = xe^{2x} - 1$

A □ f est dérivable sur ¡ et $f'(x) = (x+1)e^{2x}$.

B □ f est croissante sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$.

C □ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D □ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

E □ l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique dans ¡ .

E6 Soit f définie sur ¡ par $f(x) = \dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ et (C) la courbe de f.

A □ Le point A(0;1) est un centre de symétrie pour (C).

B □ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

C □ La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

D □ le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3

E □ Une équation de la tangente à (C) en A(0;1) est $y = 4x + 1$.

E7 Soit f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = e^{-x}\sin x$ et (C) sa courbe représentative.

A☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$.

B☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ $f'(x) = \sqrt{2}\, e^{-x} \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

C☐ Une équation de la tangente à (C) à l'origine O est $y = x$.

D☐ Pour tout x de $[0;2\pi]$ la courbe (C) est située entre la courbe de $g : x \mapsto e^{-x}$ et la courbe de $h : x \mapsto -e^{-x}$.

E☐ (C) et la courbe de g ont un unique point commun d'abscisse π.

E8 Soit la fonction f définie sur $]-\infty;\ 1\ [$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2(1-x)}$.

A☐ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

B☐ Pour tout x de $]-\infty;\ 0\ [$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{-x}\ \dfrac{x}{2(x-1)}$.

C☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

D☐ Pour tout x de $]-\infty;\ 1\ [$ $f'(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2(1-x)^2}$.

E☐ f admet en 0 un minimum égal à $\dfrac{1}{2}$.

E9 Soit les fonctions f et g définies sur ¡ par
$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$

A☐ La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

B☐ Pour tout x de ¡ $f'(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x}$.

C☐ Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

D☐ Sur l'intervalle $]-1;0[$ la courbe de f est au-dessus de celle de g.

E☐ Au point A(0;1) les tangentes aux courbes de f et g sont orthogonales.

E10 Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=(x+1)\,e^{\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

A☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

B☐ Sur $]0;+\infty[$ f est dérivable et $f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$.

C☐ Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}$.

D☐ f est dérivable en 0.

E☐ La courbe de f admet à l'origine O du repère une demi-tangente horizontale.

Qcm

Probabilités

E1 On lance un dé cubique truqué de telle façon que la probabilité de sortie d'une face est proportionnelle au numéro de cette face.
On note p(i) la probabilité de sortie de la face numérotée i.

A☐ On peut associer à cette expérience l'univers $U=\{1,2,3,4,5,6\}$.

B☐ Il existe un réel k tel que : pour tout entier i de 1 à 6, $p(i)=\dfrac{k}{i}$.

C ☐ $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 21\,k$.

D ☐ $K = 21$.

E ☐ la probabilité d'obtenir un numéro impair est $\frac{3}{7}$.

E2 On tire au hasard et simultanément deux cartes dans un jeu de 32.
Considérons les événements F : « tirer deux as » et
G : « tirer deux trèfles ».

A ☐ L'univers associé à l'expérience est l'ensemble des 32 cartes du jeu.

B ☐ $p(F) = \frac{1}{4}$.

C ☐ $p(G) = \frac{7}{124}$.

D ☐ F et G sont incompatibles donc $p(F \cup G) = \frac{17}{248}$.

E ☐ La probabilité de tirer ni as ni trèfle est $\frac{105}{248}$.

E3 On veut ranger trois boules (une rouge, une verte et une jaune) dans cinq casiers numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.
Chaque boule va dans un casier. Chaque casier peut contenir zéro boule, une boule ou plusieurs boules.
Tous les rangements possibles sont supposés équiprobables.

A ☐ Le nombre de rangements possibles est 3^5.

B ☐ La probabilité que chaque casier contienne au plus une boule est $p_1 = \frac{12}{25}$.

C ☐ La probabilité qu'un casier contienne exactement deux boules est $p_2 = \frac{4}{25}$.

D ☐ Si p_3 est la probabilité que les trois boules soient rangées dans un même casier alors : $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

E ☐ La probabilité que le casier n°1 soit vide lors d'un rangement est $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

E4 L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note F l'événement : « la première lampe est défaillante » et G l'événement : « la deuxième lampe est défaillante ». Des essais ont montré que : $p(F) = 0{,}12$; $p(G) = 0{,}18$; $p(F \cap G) = 0{,}07$.

A ☐ Les événements F et G sont incompatibles.

B ☐ Les événements F et G sont indépendants.

C ☐ La probabilité de l'événement : « au moins une des deux lampes est défaillante » est 0,15.

D ☐ La probabilité de l'événement : « les deux lampes fonctionnent » est 0,77.

E ☐ La probabilité de l'événement : « la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante » est 0,05.

E5 Un jeu consiste à extraire simultanément et au hasard trois jetons d'une urne contenant 3 jetons blancs, 4 jetons rouges et 1 jeton jaune. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de jetons blancs obtenus.
Pour gagner à ce jeu il faut obtenir au moins 2 jetons blancs, mais on estime qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne une fois sur 2.
On note T l'événement « être un tricheur » et
G l'événement « gagner à ce jeu ».

A ☐ La probabilité d'obtenir 3 jetons de la même couleur est $\frac{5}{56}$.

B ☐ La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

C ☐ La probabilité de gagner pour un joueur qui ne triche pas est $p(G/\overline{T}) = \frac{2}{7}$.

D ☐ La probabilité de gagner à ce jeu est $p(G) = \frac{11}{14}$.

E ☐ Jules a gagné. La probabilité que jules soit un tricheur est $\frac{7}{43}$.

E6 Des études ont montré qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de chances de la contracter alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de risques de tomber malade.

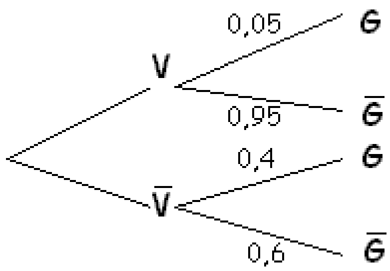
Le directeur d'une entreprise, constatant que chaque hiver un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe, décide de proposer une vaccination gratuite, afin de susciter des volontaires.

On choisit un employé au hasard et on considère les événements :

V : « l'employé s'est fait vacciner » ;

G : « l'employé contractera la grippe durant l'hiver ».

A ☐ On peut résumer la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



B ☐ $p(G) = 0{,}4\, p(V) - 0{,}35$.

C ☐ Le pourcentage minimum de personnes à vacciner pour que moins de 20 % des employés aient la grippe cet hiver est environ 58 %.

D ☐ Si l'on suppose que 80 % des employés acceptent de se faire vacciner alors la probabilité qu'un employé, pris au hasard, tombe malade est 0,12.

E ☐ Louis, ingénieur dans l'entreprise, tombe malade de la grippe. Si 80 % des employés ont été vaccinés, la probabilité que Louis l'ait été est 0,25.

E7 Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue trois tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si elle est blanche, on ne la remet pas.

On note E_k l'événement : « seule la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche »

A ☐ La probabilité de l'événement E_1 : « seule la première boule tirée est blanche » est $p(E_1) = \dfrac{5}{9}$.

B ☐ $p(E_2) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9} \times \dfrac{4}{8} = \dfrac{10}{81}$ et $p(E_3) = \dfrac{80}{729}$.

C ☐ Si F est l'événement : « on a obtenu une seule boule blanche à l'issue de 3 tirages » alors une valeur approchée de $p(F)$ est 0,37 .

D ☐ Sachant que l'on a obtenu une seule boule blanche à l'issue de 3 tirages, la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier est $\frac{64}{217}$.

E ☐ Le nombre de tirages successifs d'une boule n'est plus limité à trois.
Pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit strictement supérieure à 0,99 il faut tirer successivement au moins 4 boules.

E8 On lance deux dés cubiques parfaitement équilibrés.
Sur le dé rouge, deux faces sont marquées 2, deux faces sont marquées 4 et deux faces sont marquées 6. Sur le dé vert, trois faces sont marquées 1, deux faces sont marquées 3 et une face est marquée 5.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des deux numéros sortis.

A ☐ La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant:

x_i	3	5	7	9	11
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$

B ☐ L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{19}{3}$.

C ☐ L'écart type de X est $\sigma(X) = \frac{2\sqrt{11}}{3} \approx 2{,}2$.

D ☐ Si l'on appelle succès l'événement $S = (\ E(X) - \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sigma(X)\ )$ alors $p(S) = \frac{2}{3}$.

E ☐ En effectuant cinq lancers successifs des deux dés la probabilité d'obtenir exactement 2 succès est $6 \times \left(\frac{7}{9}\right)^2 \left(\frac{2}{9}\right)^3$.

E9 Une cible circulaire est composée de trois zones concentriques notées 1, 2 et 3. Les probabilités d'atteindre ces trois zones sont dans l'ordre : $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{12}$. On admet que les résultats de plusieurs tirs successifs sont indépendants.

A ☐ La probabilité pour qu'un concurrent atteigne trois fois la zone 3 en trois lancers successifs est $\dfrac{343}{1728}$.

B ☐ La probabilité q'un concurrent atteigne les zones 1, 2 et 3 dans n'importe quel ordre est $\dfrac{7}{432}$.

C ☐ La probabilité qu'un concurrent atteigne la zone 3 pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer est $p_n = \left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \times \dfrac{7}{12}$.

D ☐ La suite (p_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $p_0 = \dfrac{7}{12}$.

E ☐ On en déduit que la probabilité de l'événement F_n « le concurrent atteint au moins une fois la zone 3 en n lancers successifs » est

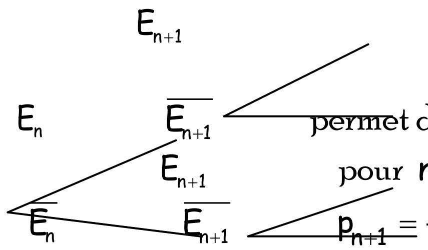
$$p(F_n) = \sum_{k=1}^{k=n} p_k = p_1 \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{1-\frac{5}{12}} = \frac{7}{12}\,\frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{\frac{7}{12}} = 1-\left(\frac{5}{12}\right)^n .$$

E10 Pour analyser le fonctionnement d'une machine d'atelier, on note, mois après mois, ses pannes et on remarque que :
- sur un mois la machine tombe au plus une fois en panne ;
- si pendant le mois « m » la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant « m+1 » est 0,24.
- si la machine tombe en panne le mois « m » (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant « m+1 » est 0,04.
- la probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par p_n la probabilité de l'événement E_n « la machine tombe en panne le $n^{\text{-ième}}$ mois suivant sa mise en service »

A ☐ On a par hypothèse : $p_1 = p(E_1) = 0{,}1$; $p(E_{n+1}/\overline{E_n}) = 0{,}24$; $p(E_{n+1}/E_n) = 0{,}04$.

B ☐ L'arbre pondéré suivant:



permet de montrer que : pour $n \geq 1$, $p_{n+1} = -0{,}2\,p_n + 0{,}24$

C ☐ En posant pour $n \geq 1$, $U_n = p_n - 0,2$ on montre que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

D ☐ Pour tout $n \geq 1$, $U_n = (-0,2)^{n-1}(-0,1)$.

E ☐ $\lim(p_n) = +\infty$.