Synthèse Y.BOULILA

Ensemble C des nombres complexes

A) Forme algèbrique d'un nombre complexe.

Théorème

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$,de nombres appelés *nombres complexes*, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans R ;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme (dite algèbrique) :
  $z = a + i b$ où a et b sont des réels.

Définitions

- Le réel a est appelé *partie réelle* de z et est noté **Re(z)**.
- Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et est noté **Im(z)**.
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i$ est noté $z = a$ et z est un *réel.*
  - Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib$ est noté $z = ib$ et z est appelé *imaginaire pur.*
  - Le complexe $0 + 0i$ noté 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Premières conséquences

a, b, a', b' sont des réels

$$a + i b = a' + i b' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$$
$$a + i b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$$

Opposé d'un complexe

Si $z = a + i b$ avec a et b réels alors on appelle opposé de z le complexe noté $-z$ tel que : $-z = -a + i(-b)$

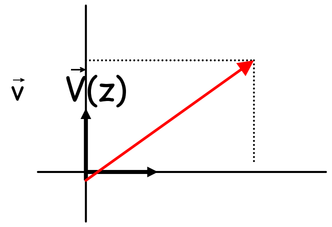
B) Representation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

Définitions

Soit le complexe $z = a + i\,b$, a et b réels.

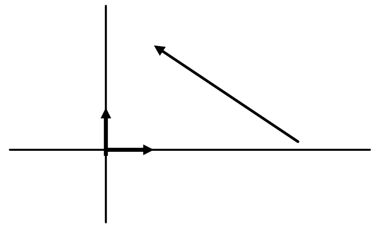
- Le point $M(a;b)$ est appelé le *point image* de z.
  On le note souvent $M(z)$.
- Le vecteur $\vec{V}\,(a;b)$ est le *vecteur image* de z.
  On le note souvent $\vec{V}(z)$.
- Le complexe z est *l'affixe* du point M et *l'affixe* du vecteur $\vec{V}$.
  On le note souvent z_M ou $z_{\vec{V}}$.



Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

affixe($\overrightarrow{AB}$) = affixe (B) – affixe (A)

On note souvent : $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$

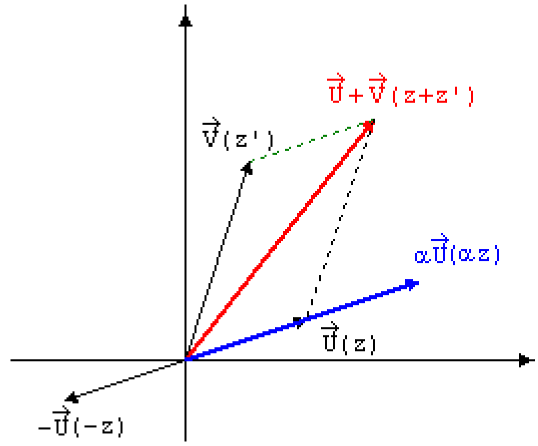


Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel α,

$$\boxed{\begin{array}{l} z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}} \\ z_{\alpha\vec{U}} = \alpha\, z_{\vec{U}} \end{array}}$$

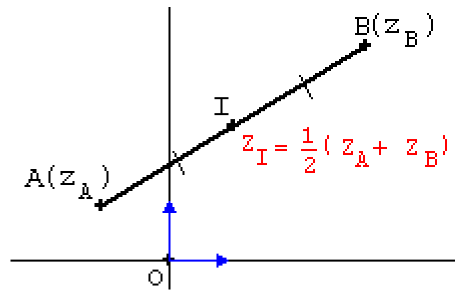
en particulier : $z_{-\vec{U}} = -\,z_{\vec{U}}$



Affixe du milieu d'un segment

Si I est le milieu du segment [AB] alors

$$\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$$



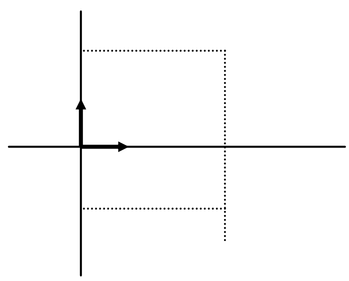
C) Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle *conjugué* du complexe $z = a + i\,b$, a et b réels, le complexe noté $\bar{z}$ et défini par : $\bar{z} = a - i\,b$.

Interprétation géométrique

Les images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (appelé souvent axe des réels).



Remarque: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$.

Théorèmes

Soit z un nombre complexe.

- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

Propriétés

Pour tous complexes z et z' :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$
  Ces résultats s'étendent à une somme algébrique de n termes.
- $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$
  Ces résultats s'étendent à un produit de n termes :
  pour tout entier naturel n, $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$
- Si $z = a + i\,b$ avec a et b réels alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$ donc pour $z \neq 0$, soit

si $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$. C'est la méthode utilisée pour écrire sous forme algébrique un inverse ou un quotient.

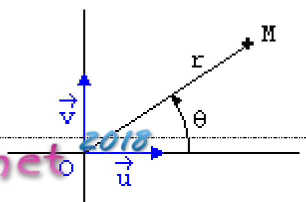
D) Module et arguments d'un nombre complexe non nul.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, et soit $(r,\ \theta)$ un couple de coordonnées polaires du point M dans $(O;\ \vec{u})$.

- le réel r est appelé module de z et noté $|z|$;
- le réel θ est appelé argument de z et noté $\arg(z)$.

On a donc : $|z| = r = OM$

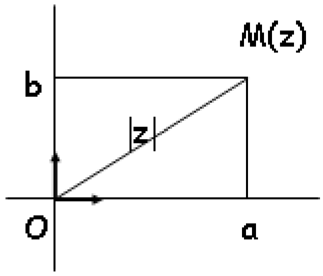


$\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

Remarques

- Le complexe 0 a pour module 0 mais n'a pas d'argument.
- Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'eux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + K2\pi, K \in \mathbb{Z}$. On écrit alors :
- $\arg(z) = \theta\ [\text{mod } 2\pi]$ (ou simplement $[2\pi]$).

Conséquences



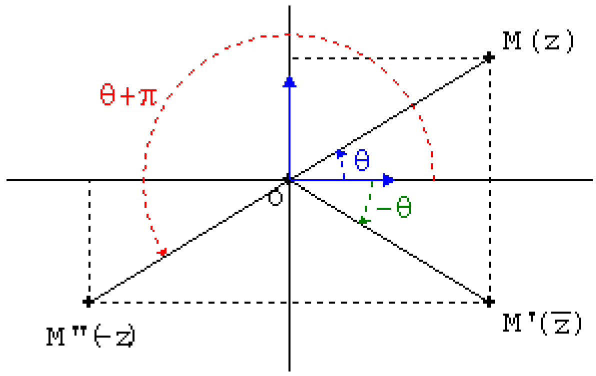
- Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Le module de tout réel x est la valeur absolue de x.
- z réel non nul équivaut à $\arg(z) = 0\ [\pi]$.

z imaginaire pur non nul équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

- Soit z un complexe non nul :

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (\text{mod } 2\pi)$

$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad (\text{mod } 2\pi)$

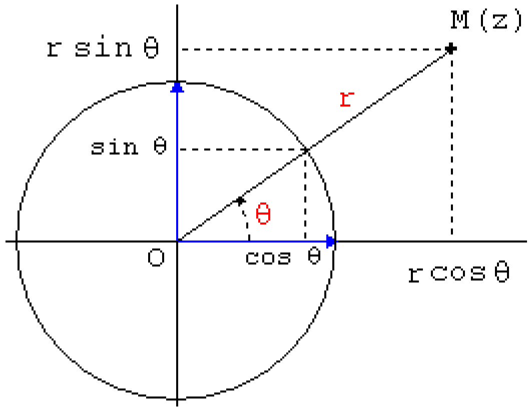


E) Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

Théorème

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un complexe non nul.
Si $|z| = r$ et si $\arg(z) = \theta\ [\text{mod } 2\pi]$ alors

$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$



Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ.
L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z.

Relations de passage entre forme algébrique et formes trigonométriques.

Forme algébrique
$z = a + ib$
a et b réels

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$ →

← $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Formes trigonométriques
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Egalité de deux complexes

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et des arguments égaux modulo 2π.

Théorème

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

F) Propriétés des modules et arguments.

Propriétés des modules

Pour tous complexes z et z' :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
- $|-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ou $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0.$
- Le module d'un produit de n nombres complexes est égal au produit des modules de ces complexes.
  En particulier : pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.

Propriétés des arguments

Pour tous complexes non nuls z et z'

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$
- La première propriété s'étend au produit de n nombres complexes non nuls. En particulier :
  pour tout entier naturel n, $\arg(z^n) = n\ \arg(z)\ [2\pi]$

Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

G) Formes exponentielles d'un nombre complexe non nul.

Définition

Pour tout réel θ on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Alors, si z est un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle forme exponentielle de z l'écriture : $z = r\,e^{i\theta}$.

Règles de calcul sur les formes exponentielles

θ et θ' sont des réels quelconques, r et r' sont des réels > 0.

- $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r' \text{ et } \theta = \theta' \ [\text{mod } 2\pi])$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$
- $re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\dfrac{r'e^{i\theta'}}{r\,e^{i\theta}} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\,e^{i\,n\theta}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

Formules d'Euler

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \boxed{\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\sin\theta = \boxed{\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Equation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0$, *a réel* $\neq 0$, *b et c réels.*

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution rélle double

$$z = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : dans tous les cas $\quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

H) Distances et angles orientés

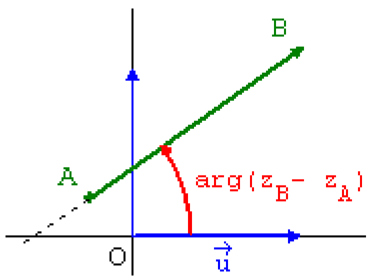
Longueur d'un segment [AB]

$$AB = \boxed{|z_B - z_A|}$$

Mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

A et B étant deux points distincts

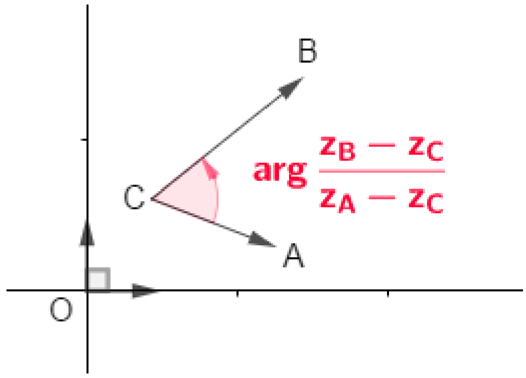
$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \boxed{\arg(z_B - z_A) \quad (\text{mod } 2\pi)}$$



Mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

A, B et C étant trois points distincts

$$\boxed{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \quad (\text{mod } 2\pi)}$$



Conséquences

Les points A, B et C étant trois points distincts :

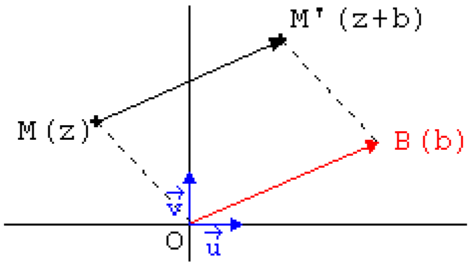
- les points A, b et C sont alignés si, et seulement si, $\arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 0 \quad [\pi]$
- les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si, et seulement si,

$\arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

I) Transformations du plan.

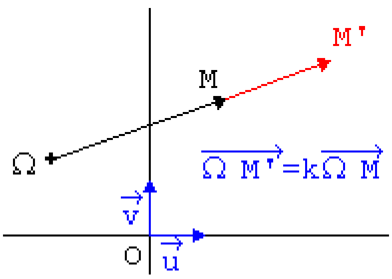
Translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$.

Soit B le point d'affixe b.
Le point M' d' affixe $z' = z + b$ est l'image du point M d' affixe z par la translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$.

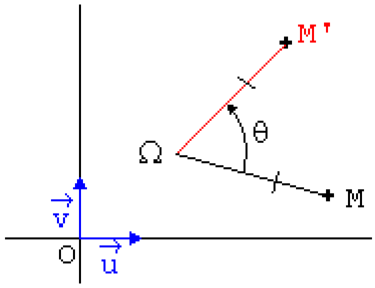


Homothétie de centre Ω et de rapport K.

Soit Ω le point d'affixe ω et k un réel non nul.
Le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$ est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.



Rotation de centre Ω et d'angle θ



Soit Ω le point d'affixe ω et θ un réel.
Le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre Ω et d'angle θ.