Synthese youssefboulila

Lois de probabilité continues (ou à densité)

A) Définitions.

Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire X est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On s'intéresse alors à des événements du type : « La valeur de X est comprise entre les réels a et b de I. Nous noterons $(a \le X \le b)$ un tel événement.

Densité de probabilité

On appelle densité de probabilité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction f définie sur I et vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I ;
- f est positive sur I ;
- $\int_{\mathrm{I}} f(x)dx = 1$ (l'aire sous la courbe de f est égale à 1).

Remarque : lorsque $\mathrm{I} = [a;+\infty[$ par exemple, la dernière condition s'écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$.

Loi de probabilité à densité

On définit la loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ en posant, pour tous réels a et b de I avec $a \le b$,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Autres notations possibles :

$P(a \le X \le b)$ est aussi noté $P_X\left([a;b]\right)$ ou simplement $P\left([a;b]\right)$.

$P\left(X \ge a\right)$ est aussi noté $P\left([a;+\infty[\right)$.

Propriétés

1. La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de

www.devoirat.net 2018

ces intervalles.

Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \varnothing$ alors $P(J \cap K) = P(J) + P(K)$.

2. La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle.
En effet, pour tout réel a de I :
$P(X = a) = P([a;a]) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

3. On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a \leq b$:
$P([a;b]) = P([a;b[) = P(]a;b]) = P(]a;b[)$.
$P(X > a) = P(X \geq a)$, etc.

4. Si $\overline{[a;b]}$ désigne le complémentaire de $[a;b]$ dans I, alors
$P(\overline{[a;b]}) = 1 - P([a;b])$.

5. Si J et K sont des intervalles inclus dans I avec $P(K) \neq 0$ alors

$$P_K(J) = \frac{P(K \cap J)}{P(K)}$$

B) Deux exemples de lois continues.

$\boxed{1}$ - Loi uniforme sur $[0;1]$

Définition

On appelle *loi uniforme sur* $[0;1]$ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1]$.

Exemple

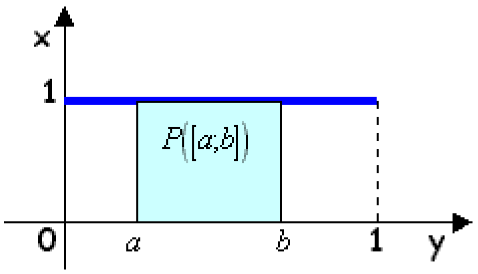
Le choix au hasard d'un nombre réel dans l'intervalle $[0;1]$ est modélisé par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

Théorème

Si P est la loi uniforme sur $[0;1]$ alors, pour tous réels a et b de $[0;1]$ avec $a \leq b$:

$$P([a;b]) = \int_a^b 1dx = [x]_a^b = b - a$$

www.devoirat.net 2018



Propriétés

- Soit P la loi uniforme sur $[0;1]$.
  Si I et J sont des sous-intervalles de $[0;1]$ de même amplitude
  alors $P(\mathrm{I}) = P(\mathrm{J})$.

- Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$
  alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{1}{12}$.

$\boxed{2}$- Loi exponentielle de paramètre λ

Définition

Soit λ un réel strictement positif.
On appelle *loi exponentielle de paramètre λ* la loi de probabilité dont
la densité f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda\ e^{-\lambda x}$

Exemple

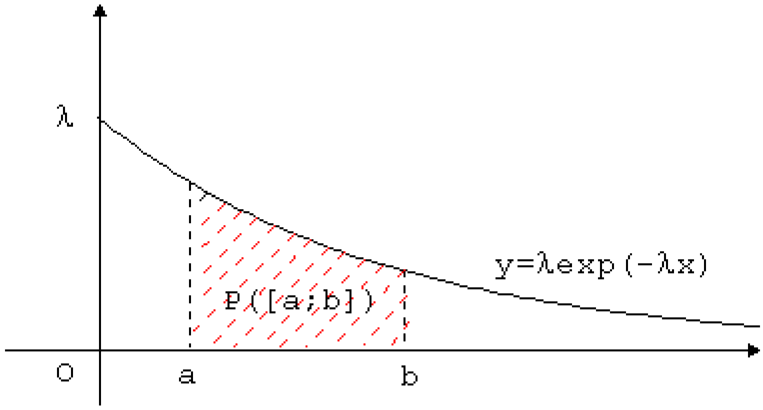
La durée de vie, exprimée en années, d'un noyau radioactif ou d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Théorème

Si P est la loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tous réels positifs a et b avec $a \leq b$:

$$P([a;b]) = \int_a^b \lambda\ e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

www.devoirat.net 2018



Propriétés

- Soit P la loi exponentielle de paramètre λ.
  Pour tout réel positif t
  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$ et donc $P(X > t) = e^{-\lambda t}$.

- Si X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ
  alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

- Pour tous réels positifs s et t, $P\left(X > s + t \;/\; X > s\right) = P(X > t)$.
  On dit que la loi exponentielle est une *loi de durée de vie sans vieillissement*.
  Signification : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

www.devoirat.net 2018