Exercice 1 calcul d'aire – primitive-fonction réciproque

Oueslati Aymen

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1°/ Etudier f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2°/ a/ Exprimer $f(x)$ à l'aide de la variable $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0, \pi[$

b/ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D} = \left\{M(x;y) \mid \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} \text{ et } 0 \le y \le f(x)\right\}$

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

a/ Montrer que g est bijective puis tracer dans le même repère les courbes C_g et $C_{g^{-1}}$

b/ Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $g^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

4°/ On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par : $\varphi(x) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

a/ Montrer que φ est dérivable et que pour tout x de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $\varphi'(x) = 1$

b/ Calculer $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ puis exprimer $\varphi(x)$ en fonction de x

c/ Déterminer la valeur de l'intégrale : $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

Correction

1°/ $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ définie sur ; $]0, \pi[$

f est dérivable sur $]0, \pi[$, $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty \left(\text{car} : \lim_{x \to 0^+} \sin x = 0^+\right)$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty \left(\text{car} : \lim_{x \to \pi^-} \sin x = 0^+\right)$

donc la droite d'équation $x = \pi$ est asymptote à $\mathscr{C}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos x		+	0	−	
f'(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

www.devoirat.net 2018

2°/a/ $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ donc : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ d'où :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{U'(x)}{U(x)} \text{ Où : } U(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

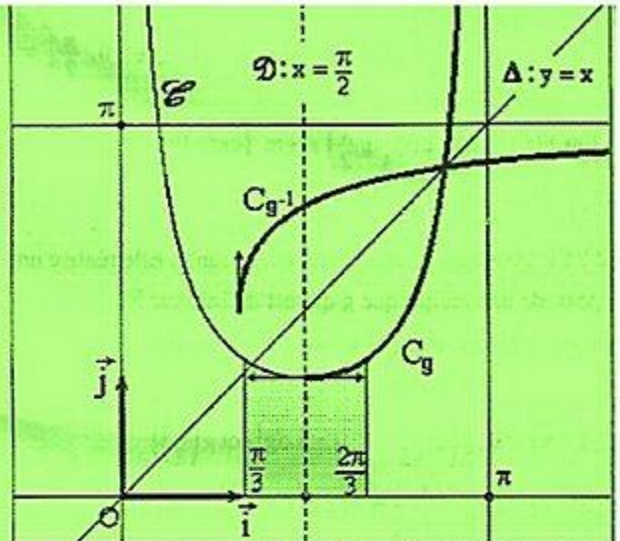
Alors une primitive de f est définie par :

$F(x) = \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K\ ;\ K \in \mathbb{R}.$

b/ $\mathcal{D} = \left\{ M(x,y) \mid \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} \text{ et } 0 \le y \le f(x) \right\}$

$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$ Car $\mathscr{C}$ est au dessus de $(O,\vec{i})$

Donc : $\mathcal{A} = \left[\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \mathrm{Log}3$



3°/ La fonction g est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur son image $[1, +\infty[$. Les courbes C_g et $C_{g^{-1}}$ sont symétriques par rapport la droite Δ d'équation : $y = x$

b/ On a : $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow g^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow g^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

4°/ a/ $\varphi(x) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = [H(t)]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} = H(g(x)) - H\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ Où H est une primitive sur $]1, +\infty[$ de la Fonction h définie par $h(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$. $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, $g(x) \in]1, +\infty[$. D'autre part : la fonction g est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et la fonction H est dérivable sur $]1, +\infty[$ donc la fonction φ est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et on a : $\varphi'(x) = g'(x)h(g(x))$

$$\varphi'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \times \frac{1}{\frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{-\cos x}{|\cos x|} = \frac{-\cos x}{-\cos x} = 1$$

b/ $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = 0$ On a : $\varphi'(x) = 1$ donc : $\varphi(x) = x + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Et comme $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$ alors : $\frac{2\pi}{3} + C = 0$ par suite $C = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{2\pi}{3}$

c/ $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$

Oueslati Aymen

Exercice 2 ☺

www.devoirat.net 2018

Soit $f(x) = \text{Log}(e^x - 1)$

1°) Etudier les variations de f puis construire sa courbe (C).

2°) Calculer $I = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$

3°) On pose $K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$. Calculer $I - K$; en déduire K.

Oueslati Aymen

Correction ☺

$f(x) = \text{Log}(e^x - 1)$

1°) $x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

D'où $D_f = \mathbb{R}_+^*$

Comme la fonction $x \longmapsto e^x - 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$

alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \text{Log}(e^x - 1) = \lim_{X \to 0^+} \text{Log}X = -\infty \quad (X = e^x - 1)$$

D'où la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \text{Log}(e^x - 1) = \lim_{X \to +\infty} \text{Log}X = +\infty \quad (X = e^x - 1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}e^x(1 - e^{-x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}e^x}{x} + \frac{\text{Log}(1 - e^{-x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{\text{Log}(1 - e^{-x})}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\text{Log}(e^x - 1) - x] = \lim_{x \to +\infty} \text{Log}(1 - e^{-x}) = 0$$

D'où la droite D: $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

www.devoirat.net 2018

Tableau de variation de f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) $I = \displaystyle\int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx = I = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = e^x - 1$

D'où $I = \left[\text{Log}\,|e^x - 1|\right]_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} = \text{Log}\,|e^{\text{Log}3} - 1| - \text{Log}\,|e^{\text{Log}2} - 1|$

$I = \text{Log}2 - \text{Log}1 = \text{Log}2.$

Oueslati Aymen

3°) $K = \displaystyle\int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$

$$I - K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx - \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$$

$$I - K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \left[\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1}\right] dx = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} dx = [x]_{\text{Log}2}^{\text{Log}3}$$

$I - K = \text{Log}3 - \text{Log}2$

d'où $K = I - \text{Log}3 + \text{Log}2$

$K = 2\text{Log}2 - \text{Log}3$

www.devoirat.net 2018

Exercice 3 ☺ fonction exponentielle – integration par partie ☺

On considère la fonction f: $[0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

On pose: $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\cdot dx$.

1°) a) Etudier les variations de f.

b) En déduire que pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$ on a: $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$

2°) a) Vérifier que, pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que $I=\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$

Oueslati Aymen

3°) Calculer $J=\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx$

4°) Démontrer que $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$

5°) Déduire des questions précédentes un encadrement de l'intégrale I.

Correction ☺

1°) a) $f: [0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$D_f=[0,\frac{1}{2}]$

f est dérivable sur $[0,\frac{1}{2}]$ et $\forall\, x \in [0,\frac{1}{2}]$

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(1-x)+e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \ge 0\ ;\ f'(x)=0 \iff x=0.$$

www.devoirat.net 2018

Tableau de variation de f:

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2e^{-\frac{1}{2}}$

b) Le tableau de variation de f montre que:

$\forall x \in [0,\frac{1}{2}] \quad 1 \leq f(x) \leq 2e^{-\frac{1}{2}}$ or $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

d'où pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$ on a: $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

2°) a) Pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$ on a:

$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)+x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$ on a:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

b) $$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right) dx$$

oueslati Aymen

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1+x)e^{-x} + x^2 f(x)\right] dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$$

www.devoirat.net 2018

3°) Calculons $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x}\,dx$

On pose: $\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$; $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$J = \left[-(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x}\,dx$$

$$J = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 - \left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$J = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 - e^{-\frac{1}{2}} + 1$$

$$J = 2 - \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$J = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$$

Oueslati Aymen

4°) On a pour tout x de $[0,\frac{1}{2}]$ on a: $1 \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$

$$x^2 \le x^2 f(x) \le \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot x^2$$

Comme de plus les fonctions $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^2 f(x)$ et $x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{e}}\cdot x^2$

continues sur $[0,\frac{1}{2}]$ on obtient alors:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \frac{2}{\sqrt{e}}\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

d'où $\frac{1}{24} \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \le \frac{1}{12\sqrt{e}}$

5°) D'après 2° - b) on a: $I = J + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$

www.devoirat.net 2018

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$J + \frac{1}{24} \leq J + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \leq J + \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leq I \leq 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leq I \leq 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$$

Exercice 4 ☺ *Partie A*

On considère les fonctions f et g définies sur IR par :

$$f(x) = e^{-x^2} \; ; g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) dont les tracés se trouvent sur feuille annexe. La figure sera complétée .

1. Identifier C_f et C_g sur la figure fournie. (Justifier la réponse).

2. Étudier la parité des fonctions f et g .

3. Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en +∞.

4. Étudier la position relative de C_f et C_g .

Partie B

On considère la fonction G définie sur IR par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt.$$

Oueslati Aymen

www.devoirat.net 2018

1. Que représente G pour la fonction g ?

2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.

3. Étudier le sens de variations de G sur R.

On définit la fonction F sur R par : pour tout réel x, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

4.a) Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - xe^{-x^2}]$

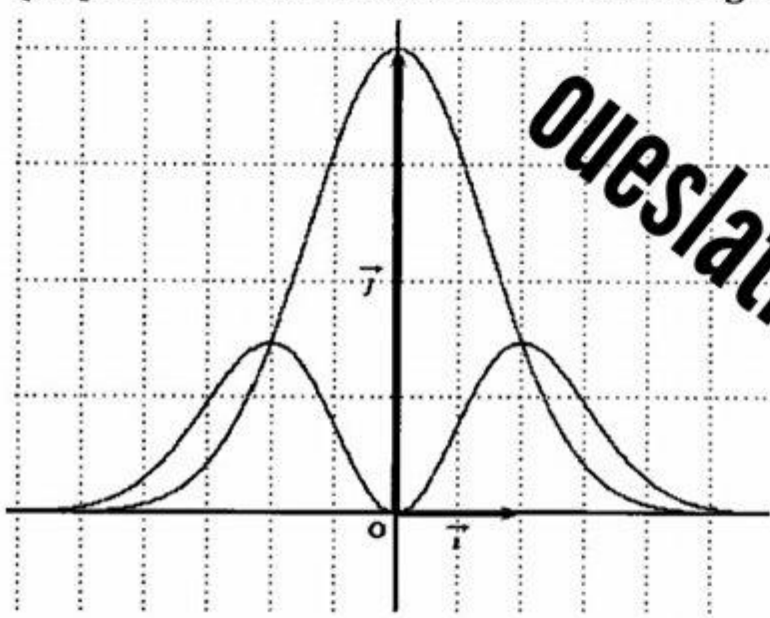
b) Démontrer que F admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1 - t^2)e^{-t^2}dt$

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $(O ; \vec{u})$ et la courbe C_g justifier graphiquement que : $N \geq \frac{1}{2}$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



Oueslati Aymen

Correction ☺Partie A

1.)On a f (0) =1 et g (0) = 0, ce qui permet de distinguer C_f et C_g .

2.)

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ f étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.

$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = g(x)$;

pour les mêmes raisons la fonction g est paire.

3. Dérivée : $f'(x) = (-2x)e^{-x^2}$. qui est signe de (- x) : donc f est croissante sur R_- et décroissante sur IR_+.

En posant $x^2 = X$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

De même pour g , $g'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x.x^2e^{-x^2} = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$ qui est du signe de $x(1 - x^2)$. On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc: } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

La limite est identique au voisinage de $-\infty$.

On obtient les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f (x)	0 ↗		1	↘	1

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
g(x)	0 ↗		$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

Oueslati Aymen
www.devoirat.net 2018

4. Soit $d(x) = f(x) - g(x) = (1-x^2)\, e^{-x^2}$ qui est du signe de $1-x^2$, donc positive sur $[-1 ; 1]$, négative ailleurs. Conclusion :

- Sur $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq g(x)$, donc C_f est au dessus de C_g ;
- Sur $]-\infty ; -1[$ C_f est au-dessous de C_g .

Partie B

1.G étant dérivable donc continue, G est la primitive de la fonction g qui s'annule en 0.

2. Pour $x > 0$, $G(x)$ représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe Cg et les droites d'équations, $X = 0$ et $X = x$.

3-On a par définition $G'(x) = g(x)$ et d'après la question 3 de la partie A,2-

$g(x) \geq 0$ sur IR. La fonction G est donc croissante sur IR.

4. a)Les fonctions t et te^{-t^2} étant dérivables, on peut intégrer G(x) par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{-1}{2}t \; ; u'(t) = \frac{-1}{2} \\ v'(t) = -2te^{-t^2} \text{ et } v(t) = e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } G(x) = \left[\frac{-1}{2}te^{-t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}[F(x) - xe^{-x^2}]$$

b)F est croissante $F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)dt$ or si $x \geq 1$ alors :

$$-t^2 \leq -t \text{ donc } \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x e^{-t}dt \leq \frac{1}{e}$$

par suite F est continue, croissante et majorée donc elle admet une limite finie en $+\infty$

Oueslati Aymen 2018

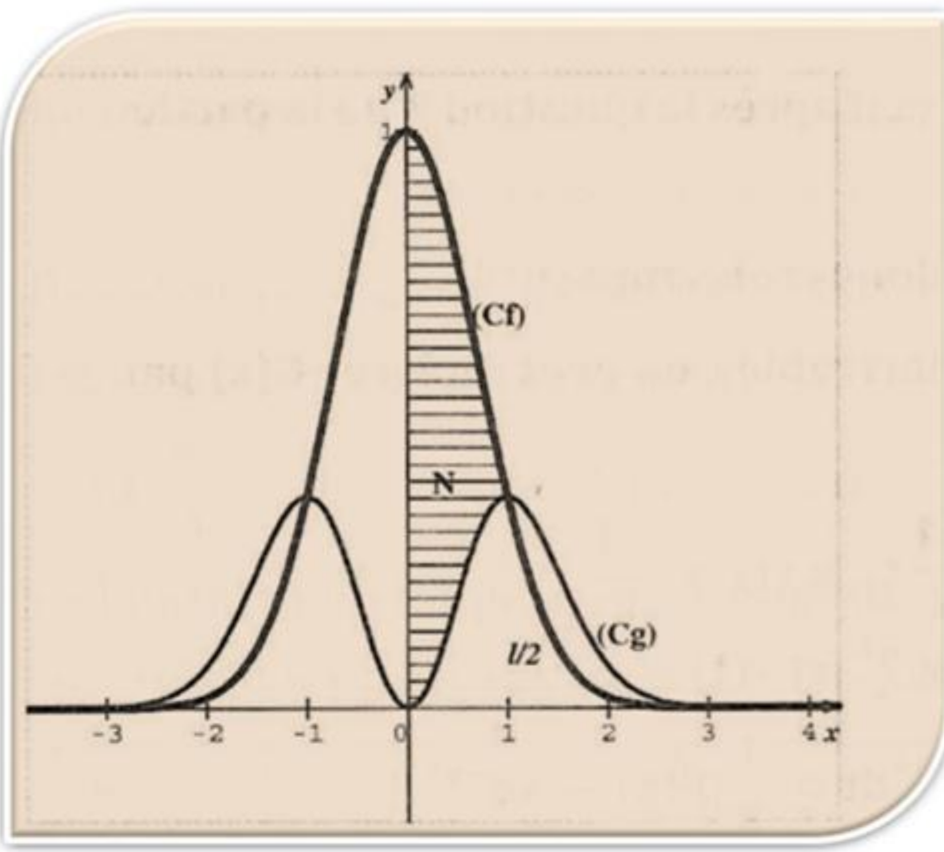
www.devoirat.net

5. a. Soit $l = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{1}{2}$

b) $N = F(1) - G(1)$.N représente donc l'aire de la surface limitée par les droites :$x = 0$, $x = 1$, et les deux courbes C_f et C_g.

c)On voit sur le graphique $N > \frac{1}{2}$



www.devoirat.net 2018