

Proposé par : Oueslati Aymen

Youtube : khazrischool

Téléphone: 27677722

www.facebook.com/Mathtewa

## Rappel de cours 😊

## Définition 😊

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien, notée exp.

## Conséquences 😊

1°) La fonction exp est définie sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \text{Log} y.$$

2°)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

3°) La fonction exp est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ on a:} \quad \exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\exp(x) > \exp(y) \Leftrightarrow x > y$$

**Notation:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

## Propriétés 😊

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{ra} = (e^a)^r$$

## Limites

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Dérivée:** La fonction exp est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exp)'(x) = e^x$

## Théorème

Soit  $U$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .  
La fonction  $x \mapsto e^{U(x)}$  est dérivable sur  $I$  et a pour fonction dérivée la  
fonction:  $x \mapsto U'(x) \cdot e^{U(x)}$ .

## Primitive

## Théorème

Soit  $U$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .  
Les primitives de la fonction  $x \mapsto U'(x) \cdot e^{U(x)}$  sont les fonctions  
définies sur  $I$  par:  $x \mapsto e^{U(x)} + c; c \in \mathbb{R}$ .

## Exercices 1 😊

Calculer, les limites des fonctions suivantes si elles existent:

$$* f(x) = e^x - x \text{ en } +\infty;$$

$$* f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x} \text{ en } +\infty$$

$$* f(x) = \frac{e^x}{x^2} \text{ en } +\infty$$

$$* f(x) = \frac{e^x}{x^n} \text{ en } +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$* f(x) = \frac{\text{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x} \text{ en } +\infty$$

$$* f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \text{ en } +\infty$$

$$* f(x) = x - \text{Log}(e^x - 1) \text{ en } +\infty$$

1°) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

- Etudier les variations de  $f$ .
- Montrer que  $f$  est paire.
- Construire  $C_f$  dans un repère orthonormé.

2°) Soit l'application  $g: ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \text{Log}(\text{tg } x)$

- Montrer que  $g$  est bijective.
- b) Soit  $h$  l'application réciproque de  $g$ . Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée  $h'$  est égale à  $f$ .

### Solution

#### Exercice 1 😊

•)  $x > 0 \quad f(x) = e^x - x = x \cdot \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

•)  $x > 0 \quad f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x} = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} \times \frac{2x+1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+1}}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

•)  $x > 0 \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x}{e^{\text{Log} x^2}} = e^x e^{-\text{Log} x^2} = e^{x - \text{Log} x^2} = e^{\sqrt{x} \left( 1 - \frac{2 \text{Log} x}{\sqrt{x}} \right)}$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log} x}{x} = 0$

•)  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

$$f(x) = \frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{\text{Log}x^n}} = e^x e^{-\text{Log}x^n} = e^{x+n\text{Log}x} = e^{\sqrt{1-n}\frac{\text{Log}x}{x}}$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0$

•)  $x > 0$   $f(x) = \frac{\text{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x} = \frac{\text{Log}e^x(1 + 2e^{-2x})}{x} = 1 + \frac{\text{Log}(1 + 2e^{-2x})}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\text{Log}(1 + e^{-2x})}{x} + 1 \right] = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(1 + e^{-2x})}{x} = 0$$

•)  $x > 0$   $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

•)  $x > 0$   $f(x) = x - \text{Log}(e^x - 1) = x - \text{Log}e^x(1 - e^{-x}) = x - x - \text{Log}(1 - e^{-x})$   
 $f(x) = -\text{Log}(1 - e^{-x})$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\text{Log}(1 - e^{-x})] = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

•)  $x \neq 0$   $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2}{3}$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

d'où  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$

## Exercice 2 😊

1°) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$

a) On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1 + e^{2x} \neq 0$ ; d'où  $D_f = \mathbb{R}$   
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x(1 + e^{2x}) - 2e^{2x} \cdot e^x}{(1 + e^{2x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(1 - e^{2x})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{2x}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

Tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$0$	$\frac{1}{2}$	$0$

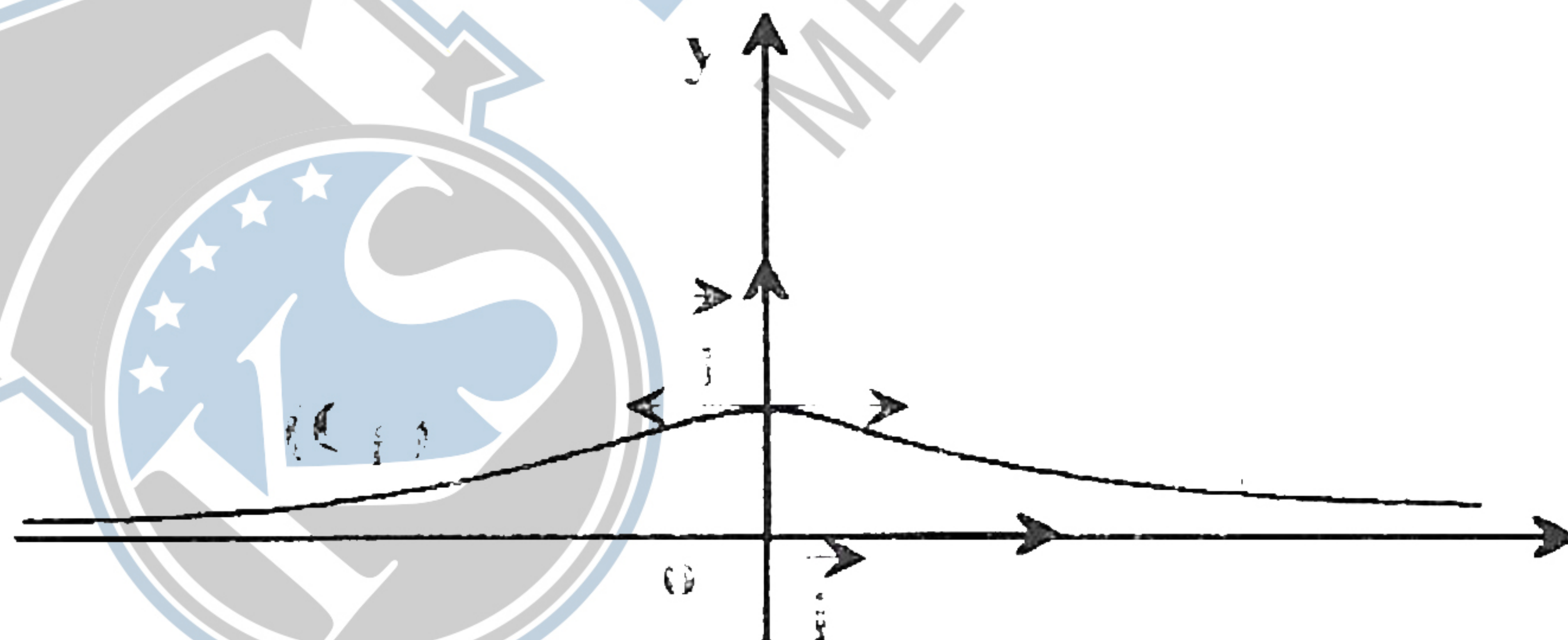
$$b) \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + e^x)} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a } (-x) \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$$

ce qui prouve que  $f$  est paire.

c) Construction de  $C_f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

La droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ . L'axe  $(y'y)$  est un axe de symétrie pour  $C_f$ .



3°) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants:

$$\bullet \begin{cases} e^x \cdot e^{x^2} = 2 \\ x = \text{Log} y \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} e^x \cdot e^{2y} = e^4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} e^x \cdot e^y = 8 \\ e^{x-y} = 9 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$$