

**Exercice 1**  calcul d'aire – primitive-fonction réciproque

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, \pi[$  par :  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1°/ Etudier  $f$  et tracer sa courbe  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2°/ a/ Exprimer  $f(x)$  à l'aide de la variable  $t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ . En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]0, \pi[$

b/ Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{D} = \left\{M(x,y) \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$

3°/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

a/ Montrer que  $g$  est bijective puis tracer dans le même repère les courbes  $C_g$  et  $C_{g^{-1}}$

b/ Calculer  $g^{-1}(\sqrt{2})$  et  $g^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

4°/ On considère la fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  par :  $\varphi(x) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

a/ Montrer que  $\varphi$  est dérivable et que pour tout  $x$  de  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ,  $\varphi'(x) = 1$

b/ Calculer  $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  puis exprimer  $\varphi(x)$  en fonction de  $x$

c/ Déterminer la valeur de l'intégrale :  $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

Oueslati Aymen

**Correction** 

1°/  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$  définie sur ;  $]0, \pi[$

$f$  est dérivable sur  $]0, \pi[$ ,  $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty$  (car :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0^+$ )

donc la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à  $\mathcal{C}$

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$  (car :  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+$ )

donc la droite d'équation  $x = \pi$  est asymptote à  $\mathcal{C}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
cos x	+	0	-
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

2°/ a/  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$  donc :  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  d'où :

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right))}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{U'(x)}{U(x)} \text{ Où : } U(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

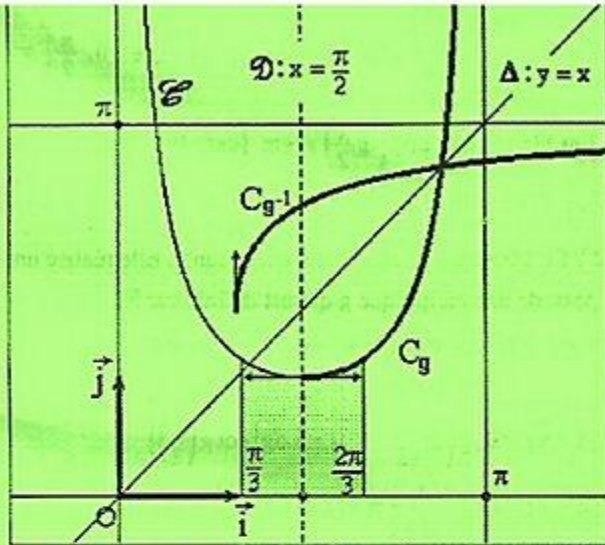
Alors une primitive de  $f$  est définie par :

$$F(x) = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + K ; K \in \mathbb{R}.$$

b/  $\mathcal{D} = \left\{ M(x, y) \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx \text{ Car } \mathcal{E} \text{ est au dessus de } (O, \vec{i})$$

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = \left[ \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \operatorname{Log} 3$$



3°/ La fonction  $g$  est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  sur son image

$]1, +\infty[$ . Les courbes  $C_g$  et  $C_{g^{-1}}$  sont symétriques par rapport la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = x$

b/ On a :  $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow g^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$  et  $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow g^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$

4°/ a/  $\varphi(x) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = [H(t)]_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g(x)} = H(g(x)) - H\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  Où  $H$  est une primitive sur  $]1, +\infty[$  de la

Fonction  $h$  définie par  $h(t) = \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} \cdot \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ,  $g(x) \in ]1, +\infty[$ . D'autre part : la fonction  $g$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  et la fonction  $H$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  donc la fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$  et on a :  $\varphi'(x) = g'(x)h(g(x))$

$$\varphi'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \times \frac{1}{\frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{-\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{-\cos x}{|\cos x|} = \frac{-\cos x}{-\cos x} = 1$$

b/  $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{g\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = 0$  On a :  $\varphi'(x) = 1$  donc :  $\varphi(x) = x + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ )

Et comme  $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$  alors :  $\frac{2\pi}{3} + C = 0$  par suite  $C = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi(x) = x - \frac{2\pi}{3}$

c/  $I = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$

Exercice 2 😊

Soit  $f(x) = \text{Log}(e^x - 1)$

1°) Etudier les variations de  $f$  puis construire sa courbe (C).

2°) Calculer  $I = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

3°) On pose  $K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1} dx$ . Calculer  $I - K$ ; en déduire  $K$ .

Correction ☺

$$f(x) = \text{Log}(e^x - 1)$$

1°)  $x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$$\text{D'où } D_f = \mathbb{R}_+^*$$

Comme la fonction  $x \mapsto e^x - 1$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}(e^x - 1) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \text{Log}X = -\infty \quad (X = e^x - 1)$$

D'où la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote à la courbe (C).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}(e^x - 1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \text{Log}X = +\infty \quad (X = e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}e^x(1 - e^{-x})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}e^x}{x} + \frac{\text{Log}(1 - e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{\text{Log}(1 - e^{-x})}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{Log}(e^x - 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}(1 - e^{-x}) = 0$$

D'où la droite  $D: y = x$  est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $+\infty$ .

Tableau de variation de f:

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		$+\infty$

-∞ +∞

$$2^{\circ}) \quad I = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = I = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{u'(x)}{u(x)} dx \quad \text{avec } u(x) = e^x - 1$$

$$\text{D'où } I = \left[ \text{Log} |e^x - 1| \right]_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} = \text{Log} |e^{\text{Log}3} - 1| - \text{Log} |e^{\text{Log}2} - 1|$$

$$I = \text{Log}2 - \text{Log}1 = \text{Log}2.$$

$$3^{\circ}) \quad K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$I - K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx - \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$I - K = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} \left[ \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} \right] dx = \int_{\text{Log}2}^{\text{Log}3} dx = [x]_{\text{Log}2}^{\text{Log}3}$$

$$I - K = \text{Log}3 - \text{Log}2$$

$$\text{d'où } K = I - \text{Log}3 + \text{Log}2$$

$$K = 2\text{Log}2 - \text{Log}3$$

**oueslati Aymen**

**Exercice 3** 😊 *fonction exponentielle – integration par partie* 😊

On considère la fonction  $f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

On pose:  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$ .

1°) a) Etudier les variations de  $f$ .

b) En déduire que pour tout  $x$  de  $[0, \frac{1}{2}]$  on a:  $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

2°) a) Vérifier que, pour tout  $x$  de  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

b) En déduire que  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$

3°) Calculer  $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx$

4°) Démontrer que  $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

5°) Déduire des questions précédentes un encadrement de l'intégrale  $I$ .

**oueslati Aymen**

**Correction** 😊

1°) a)  $f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$D_f = [0, \frac{1}{2}]$$

$f$  est dérivable sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) + e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} \geq 0; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tableau de variation de f:

x	0		$\frac{1}{2}$
f'(x)	0	+	
f(x)	1	$2e^{-\frac{1}{2}}$	

b) Le tableau de variation de f montre que:

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \quad 1 \leq f(x) \leq 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ or } e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{d'où pour tout } x \text{ de } [0, \frac{1}{2}] \text{ on a: } 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

2°) a) Pour tout x de  $[0, \frac{1}{2}]$  on a:

$$1 + x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi pour tout x de  $[0, \frac{1}{2}]$  on a:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{1-x}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ (1+x)e^{-x} + x^2 f(x) \right] dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$$

oueslati Aymen

3°) Calculons  $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx$

On pose:  $\begin{cases} u(x) = 1+x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$  ;  $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$J = \left[ -(1+x)e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x} dx$$

$$J = -\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} + 1 - \left[ e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$J = -\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} + 1 - e^{-\frac{1}{2}} + 1$$

$$J = 2 - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$J = 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}}$$

oueslati Aymen

4°) On a pour tout  $x$  de  $[0, \frac{1}{2}]$  on a:  $1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$

$$x^2 \leq x^2 f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot x^2$$

Comme de plus les fonctions  $x \mapsto x^2$ ;  $x \mapsto x^2 f(x)$  et  $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot x^2$

continues sur  $[0, \frac{1}{2}]$  on obtient alors:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

5°) D'après 2° - b) on a:  $I = J + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$J + \frac{1}{24} \leq J + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq J + \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{24} \leq I \leq 2 - \frac{5}{2\sqrt{e}} + \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\frac{49}{24} - \frac{5}{2\sqrt{e}} \leq I \leq 2 - \frac{29}{12\sqrt{e}}$$

**Exercice 4**  **Partie A**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x^2} ; g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  dont les tracés se trouvent sur feuille annexe. La figure sera complétée .

1. Identifier  $C_f$  et  $C_g$  sur la figure fournie. (Justifier la réponse).
2. Étudier la parité des fonctions  $f$  et  $g$  .
3. Étudier le sens de variation de  $f$  et de  $g$  . Étudier les limites éventuelles de  $f$  et de  $g$  en  $+\infty$ .
4. Étudier la position relative de  $C_f$  et  $C_g$  .

**Partie B**

On considère la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt.$$

*Oueslati Aymen*



1. Que représente G pour la fonction g ?

2. Donner, pour  $x > 0$ , une interprétation de  $G(x)$  en termes d'aires.

3. Étudier le sens de variations de G sur  $\mathbb{R}$ .

On définit la fonction F sur  $\mathbb{R}$  par : pour tout réel x,  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

4.a) Démontrer, que, pour tout réel x,  $G(x) = \frac{1}{2}[F(x) - xe^{-x^2}]$

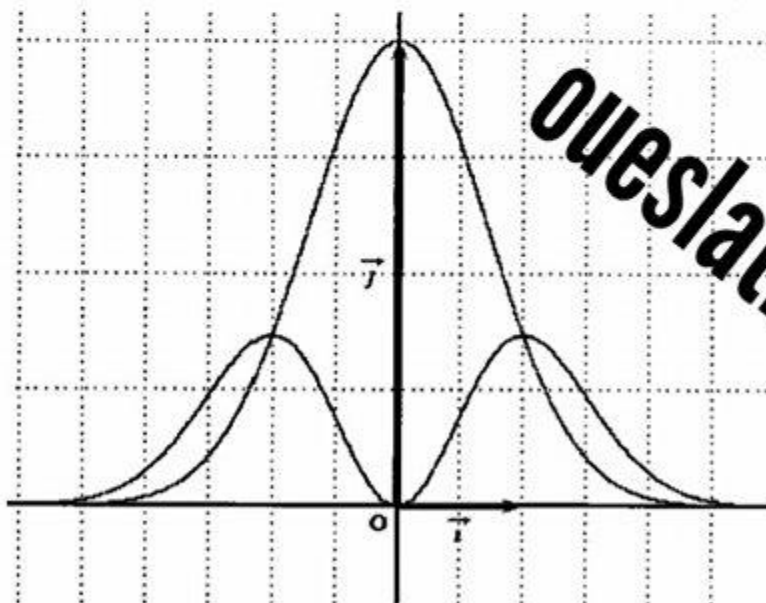
b) Démontrer que F admet une limite finie l quand x tend vers  $+\infty$

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en  $+\infty$  que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel  $N = \int_0^1 (1 - t^2)e^{-t^2} dt$

c. En admettant que la limite de G en  $+\infty$  représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite  $(0; \vec{x})$  et la courbe  $C_g$  justifier graphiquement que :  $N \geq \frac{1}{2}$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



oueslati Aymen

Correction  Partie A

1.) On a  $f(0) = 1$  et  $g(0) = 0$ , ce qui permet de distinguer  $C_f$  et  $C_g$ .

2.)

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$   $f$  étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = g(x);$$

pour les mêmes raisons la fonction  $g$  est paire.

3. Dérivée :  $f'(x) = (-2x)e^{-x^2}$ . qui est signe de  $(-x)$  : donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

En posant  $x^2 = X$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

$$x \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

De même pour  $g$ ,  $g'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x \cdot x^2 e^{-x^2} = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$  qui est du signe de  $x(1 - x^2)$ . On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

La limite est identique au voisinage de  $-\infty$ .

On obtient les tableaux de variations suivants :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$0$	$1$	$1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
$g(x)$	$0$	$\frac{1}{e}$	$0$	$\frac{1}{e}$	$0$

4. Soit  $d(x) = f(x) - g(x) = (1-x^2)e^{-x^2}$  qui est du signe de  $1-x^2$ , donc positive sur  $[-1; 1]$ , négative ailleurs. Conclusion :

- Sur  $[-1; 1]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , donc  $C_f$  est au dessus de  $C_g$  ;
- Sur  $]-\infty; -1[$  et  $]1; +\infty[$ ,  $C_f$  est au-dessous de  $C_g$  .

### Partie B

1.  $G$  étant dérivable donc continue,  $G$  est la primitive de la fonction  $g$  qui s'annule en 0.

2. Pour  $x > 0$ ,  $G(x)$  représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_g$  et les droites d'équations,  $X = 0$  et  $X = x$ .

3-On a par définition  $G'(x) = g(x)$  et d'après la question 3 de la partie A,2-

$g(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $G$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4. a) Les fonctions  $t$  et  $te^{-t^2}$  étant dérivables, on peut intégrer  $G(x)$  par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{-1}{2}t ; u'(t) = \frac{-1}{2} \\ v'(t) = -2te^{-t^2} \text{ et } v(t) = e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } G(x) = \left[ \frac{-1}{2}te^{-t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [F(x) - xe^{-x^2}]$$

b)  $F$  est croissante  $F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)dt$  or si  $x \geq 1$  alors :

$$-t^2 \leq -t \text{ donc } \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x e^{-t} dt \leq \frac{1}{e}$$

par suite  $F$  est continue, croissante et majorée donc elle admet une limite finie en  $+\infty$

5. a. Soit  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{1}{2}$

b)  $N = F(1) - G(1)$ .  $N$  représente donc l'aire de la surface limitée par les droites :  $x = 0$ ,  $x = 1$ , et les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

c) On voit sur le graphique  $N > \frac{1}{2}$

