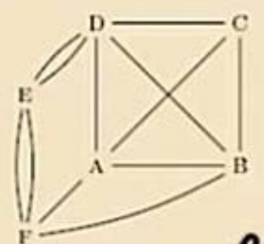
Prof:Oueslati Aymen Matrice-graphe BAC ECO AS : 2017-2018

Tél 27677722 Facebook: www.facebook.com/MathTewa

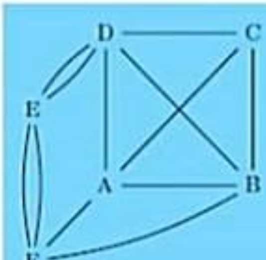
Exercice 1

. On considère le graphe suivant :



1. Détermiener l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré des sommets A et F.
3. Est-ce que le graphe est complet ? Est-il connexe ?
4. Est-ce que le graphe admet une chaîne Eulérienne ? un cycle Eulérien ? Si oui, en donner une ou un.
5. Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe (on ordonnera les sommets dans l'ordre alphabétique).
6. Combien y-a-t'il de chaînes de longueur 3 de E à B ? Les déterminer.

Correction



1. Le graphe est d'ordre 6.
2. Le sommet A est de degré 4 et le sommet F de degré 4.
3. Comme il n'y a pas d'arête de A à E, on en déduit que le graphe n'est pas complet.

   Par contre, quel que soit le couple de sommets du graphe, il existe une chaine entre les deux. D'où, le graphe est connexe.

1. Le graphe est connexe et seul deux sommets D et C sont de degré impair, ainsi, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne Eulérienne qui n'est pas un cycle. En voici une : D-E-F-E-D-A-F-B-A-C-B-D-C.
2. La matrice d'adjacence du graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. À l'aide de la calculatrice,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 17 & 6 & 15 \\ 9 & 8 & 9 & 17 & 6 & 15 \\ 9 & 9 & 6 & 11 & 8 & 8 \\ 17 & 17 & 11 & 6 & 26 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 26 & 0 & 24 \\ 15 & 15 & 8 & 4 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après le coefficient sur la 5e ligne et 2e colonne, on déduit qu'il y a 6 chaînes de longueur 3 de E à B. En voici trois :
E-D-C-B
E-D-A-B
E-F-A-B
Les trois autres sont obtenues en empruntant l'autre arête de E à D ou de E à F.

Exercice 2 😊

On considère une entreprise U qui produit des fontaines d'eau à bonbonnes. Elle fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. Justifier que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S)\quad \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 27a+9b+3c &= 17,4 \\ 125a+25b+5c &= 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

3. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?

Correction ☺

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. D'après le précédent tableau, on a $f(1) = a+b+c+10 = 11$, $f(3) = 27a+9b+3c+10 = 27.4$ et $f(5) = 125a + 25b + c + 10 = 83$. Ainsi, le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S)\quad \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 27a+9b+3c &= 17,4 \\ 125a+25b+5c &= 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. a) On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17.4 \\ 73 \end{pmatrix}$$

   Alors le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $MX = Y$.

   b) On admet que la matrice M est inversible. À l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S) est

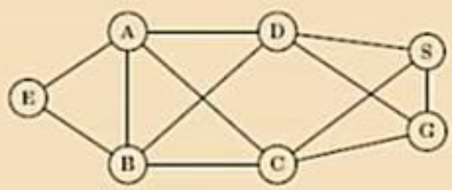
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coût total de la production est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0.5x^3 + 0.4x^2 + 0.1x + 10$.

3. En utilisant cette modélisation, on note que $C(8) = 292.4$. Ainsi, le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites serait de 29 240 euros.

Exercice 3 😊

Partie A Le graphe représente les chemins entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.

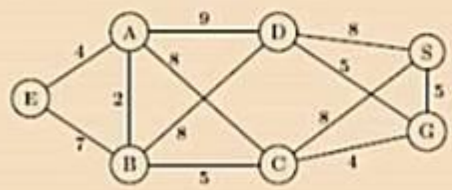


1. Un ouvrier se demande s'il peut passer par toutes les stations au moins une fois en empruntant tous les chemins exactement une fois.
   a) Est-ce possible en partant de la station E ? Si oui donner un tel chemin.
   b) Est-ce possible en partant de la station S ? Si oui donner un tel chemin.
2. On ordonne les sommets du graphe de la manière suivante : E, A, B, C, D, G, S.
   a) Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe précédent.
   b) Quelle est la nature de la matrice M ?
   c) Avec l'ordinateur, on a obtenu le résultat suivant :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 de la station E à la station S et préciser ces chemins.

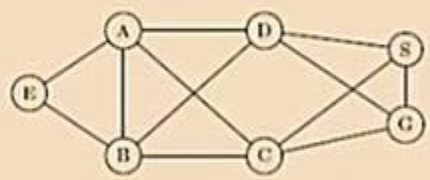
Partie B Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à S. Déterminer, en utilsant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.

Correction 😊

Partie A Le graphe représente les chemins entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Un ouvrier se demande s'il peut passer par toutes les stations au moins une fois en empruntant tous les chemins exactement une fois.
   a) Ce n'est pas possible en partant de la station E. En effet, comme le grpahe est connexe et il y a exactement deux sommets de degré impair, les sommets S et G, on déduit d'après le théorème d'Euler qu'il existe une chaîne Eulérienne qui n'est pas un cycle est qui commence nécessairement en un des sommets de degré impair donc différent de E.
   b) De la question précédente, on déduit qu'il possible d'emprunter un tel chemin en partant de la station S. Par exemple : $S-D-A-E-B-C-A-B-D-G-C-S-G$.
2. On ordonne les sommets du graphe de la manière suivante : E, A, B, C, D, G, S.
   a) La matrice d'adjacence M associée au graphe précédent est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

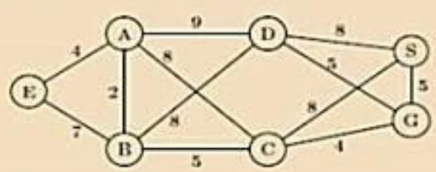
b) La matrice M est symétrique.

c) Avec l'ordinateur, on a obtenu le résultat suivant :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Le coefficient sur la 1ère ligne et 7ème colonne de M^3 est 4, ainsi le nombre de chemins de longueur 3 de la station E à la station S est 4, voici les différents chemins possibles : E - A - C - S, E - A - D - S, E - B - C - S et E - B - D - S.

Partie B Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Appliquons l'algorithme de Dijkstra :

	E	A	B	C	D	G	S
E	0	$(4, E)$	$(7, E)$	∞	∞	∞	∞
A,4	0	|	$(6, A)$	$(12, A)$	$(13, A)$	∞	∞
B,6	0	|	|	$(11, B)$	$(13, A)$	∞	∞
C,11	0	|	|	|	$(13, A)$	$(15, C)$	$(19, C)$
D,13	0	|	|	|	|	$(15, C)$	$(19, C)$
G,15	0	|	|	|	|	|	$(19, C)$
S,19	0	|	|	|	|	|	|

Ainsi, le trajet le plus rapide est $E - A - B - C - S$ et il faudra 19 minutes à l'ouvrier.

2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.

   a) Dans ce cas, le trajet entre E et S sera le suivant $E - A - B - C - B - D - S$ et durera 32 minutes.

   b) En appliquant une seconde fois l'algorithme de Dijkstra, on note que s'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, l'ouvrier aurait du choisir le trajet $E - A - D - S$ pour se rendre, au plus vite de E à S. Il aurait alors mis 21 minutes.

Exercice 4 ☺ Matrice exercices d'entrainnemen

Soit le système $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Écrire sous forme matriciel ce système.

Correction ☺ à faire très simple ☺

Exercice 5 ☺ Graphe probabiliste

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.

L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».

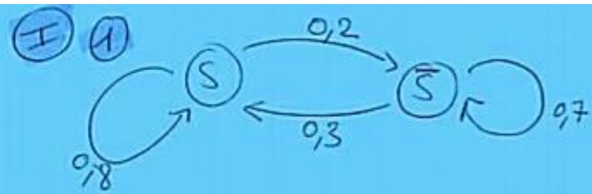
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc : $P_0 = (1 \quad 0)$.

Correction ☺

I 1)



2) a) $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ est la matrice de transit°.

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0,8^2+0,2.0,3 & 0,8.0,2+0,2.0,7 \\ 0,3.0,8+0,7.0,3 & 0,3.0,2+0,7^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) on a $P_0 = (1 \quad 0)$ et $P_1 = P_0 . M$

$P_2 = P_1 M = P_0 M.M = P_0 M^2 = (0,7 \quad 0,3)$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n M$ par théorème du cours.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \\ (p_n \quad q_n) & (0,8p_n + 0,3q_n \quad 0,2p_n + 0,7q_n) \end{array}$$

donc $(p_{n+1} \quad q_{n+1}) = P_{n+1} = (0,8p_n + 0,3q_n \quad 0,2p_n + 0,7q_n)$

En particulier $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,3q_n$ mais $p_n + q_n = 1$
$\Rightarrow q_n = 1 - p_n$

Donc finalement $p_{n+1} = 0{,}8\,p_n + 0{,}3(1-p_n)$

$$\boxed{p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}3}$$

④ la ligne ⑥ doit être la suivante :

⑥ : p prend la valeur $0{,}5p+0{,}3$.

Ⓑ ① pour $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6$

$= 0{,}5\,p_n + 0{,}3 - 0{,}6$

$= 0{,}5\,p_n - 0{,}3$

$= 0{,}5\left(p_n - \frac{0{,}3}{0{,}5}\right) = 0{,}5(p_n - 0{,}6) = 0{,}5\,u_n$

finalement (u_n) géométrique de 1er terme $u_0 = p_0 - 0{,}6 = 0{,}4$ et de raison $0{,}5$

② Par th on déduit pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\, q^n$

$\Longrightarrow u_n = 0{,}4 \times 0{,}5^n$

on a alors $p_n = 0{,}6 + u_n$ donc $p_n = 0{,}4 \times 0{,}5^n + 0{,}6$.

③ $0 < 0{,}5 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}5)^n = 0$

on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}6$

Au bout de quelques années la répartition des skieurs est de 60% de skieurs et 40% de snowboards.

(c) Nous avons un graphe pondéré connexe et on cherche la chaîne de poids minimal entre A et I

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	K	D	E	F	G	H	I
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	7_A	16_A	∞	21_A	∞	∞	∞	∞
		16_A	25_B	21_A	15_B	∞	∞	∞
		16_A	25_B	20_F		∞	22_F	∞
			25_B	20_F		∞	22_F	∞
			25_B			∞	22_F	38_F
			25_B			35_H		38_E
						30_D		38_E
								37_G

· Finalement le chemin le plus court est A-B-D-G-I et il mesure $3700 = \underline{3{,}7\ km}$