Exercice 1 ☺

Soit $n \in \mathbb{N}$, **on pose** $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$

1) a) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, interprétez graphiquement I_0 et donnez sa valeur exacte.

b) Calculer I_1.

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a : $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-2}$.

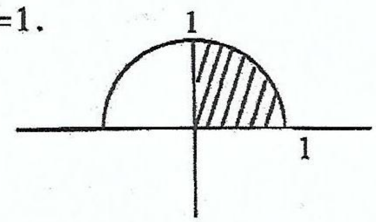
Solution ☺

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ on a : $\sqrt{1-x^2} \geq 0$

Alors I_0 c'est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan limité par : $\mathscr{C} : y = \sqrt{1-x^2}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

donc $\mathscr{C}$ est la demi-cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.



I_0 est l'aire du domaine hachurée d'où $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) $I_n = \int_0^1 x^{n-1}\, x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Posons $\begin{cases} U(x) = x^{n-1} \\ V'(x) = x\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} U'(x) = (n-1)x^{n-2} \\ V(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$I_n = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x^{n-1}\right]_0^1 + \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{n-1}{3}\int_0^1 -x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{3}\cdot I_{n-2} - \frac{n-1}{3}I_n$$

$$\left(1+\frac{n-1}{3}\right)I_n = \frac{n-1}{3}I_{n-2} \qquad \text{d'où} \quad I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$$

Exercice 2 ☺

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ par : $f(x) = \text{Log}\left(\text{tg}\frac{x}{2}\right)$

1°/ Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\text{tg}\frac{x}{2}$ puis étudier les variations de f

2°/ Montrer que f possède une réciproque g dont on précisera le domaine de définition

3°/ Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les représentations graphiques respectives de f et g dans un même repère ort $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

a/ Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$

b/ Montrer que le point $I'\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}'$

c/ Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ainsi que leurs tangentes en I et I'

4°/ a/ Montrer que la fonction g est dérivable et calculer $g'(x)$ en fonction de x

b/ Calculer la valeur de l'intégrale : $A = \int_0^{\text{Log}\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

5°/ Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_1^{e^x} \frac{dt}{1+t^2}$

a/ Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ en fonction de x

b/ Montrer que $G(x)=\alpha g(x)+\beta$ où α et β sont deux constantes que l'on précisera

c/ Calculer les intégrales : $B=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}$ et $C=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{1+t^2}$

Solution ☺

x	0		π
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

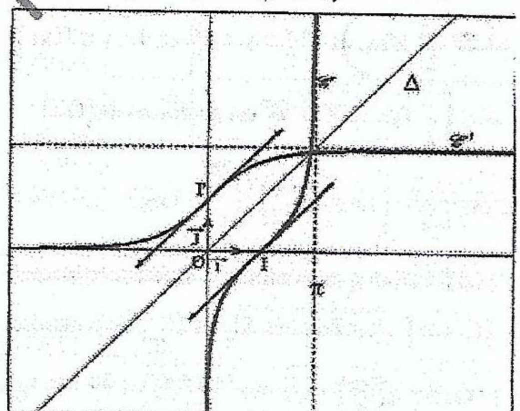
1°/ $f(x)=\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. f est dérivable sur $]0,\pi[$ et on a : $f'(x)=\frac{\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)'}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$f'(x)=\frac{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$. Or : $x\in]0,\pi[\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[\ \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2}>0 \Rightarrow f'(x)>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)=-\infty$ $\left(\text{car : }\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0^+\right)$ Donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)=+\infty$ $\left(\text{car : }\lim\limits_{x\to \pi^-}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=+\infty\right)$ Donc la droite d'équation $x=\pi$ est asymptote à $\mathscr{C}$

2°/ f est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $f(]0,\pi[)=\mathbb{R}$. Elle possède une réciproque g qui est définie sur $\mathbb{R}$.



3°/ a/ $x\in D_f \Leftrightarrow\ 0<x<\pi\ \Leftrightarrow\ -\pi<-x<0$

$\Leftrightarrow\ 0<\pi-x<\pi\ \Leftrightarrow\ \pi-x\in D_f$

$f(\pi-x)=\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right)=\mathrm{Log}\left(\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$f(\pi-x)=\mathrm{Log}\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}=-\mathrm{Log}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=-f(x)$

Donc $I\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b/ $\mathscr{C}'=S_\Delta(\mathscr{C})$ et $I'=S_\Delta(I)$ comme I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$ alors $I'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}'$

4°/ a/ La fonction f est une bijection dérivable et sa dérivée $f'(x)$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$ donc sa réciproque g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a : $g'(x)=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}$ où $y=f^{-1}(x)$ d'où :

$g'(x)=\frac{2\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{y}{2}\right)}$. D'autre part : $y=f^{-1}(x)\ \Leftrightarrow\ x=f(y)\ \Leftrightarrow\ x=\mathrm{Log}\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2}\right)\ \Leftrightarrow\ e^x=\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2}\right)$

Par suite : $g'(x)=\dfrac{2e^{x}}{1+e^{2x}}=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

b/ $A=\displaystyle\int_0^{\text{Log}\sqrt{3}}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1}{2}\int_0^{\text{Log}\sqrt{3}}g'(x)dx=\frac{1}{2}\left(g\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)-g(0)\right)$

$g\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)=x \Leftrightarrow f(x)=\text{Log}\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{Log}\left(tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\text{Log}\sqrt{3} \Leftrightarrow tg\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; or $x\in\,]0,\pi[$ d'où : $x=\frac{2\pi}{3}$ donc : $g\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$

on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$ donc : $g(0)=\frac{\pi}{2}$ et par suite : $A=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{12}$

5°/ a/ On pose $u(x)=e^{x}$ et soit H une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par : $h(t)=\frac{1}{1+t^2}$ On aura alors

$G(x)=\displaystyle\int_1^{U(x)}\frac{dt}{1+t^2}=\left[H(t)\right]_1^{U(x)}=H(u(x))-H(1)$. Les deux fonctions U et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=\left(e^{x}\right)'h\left(e^{x}\right)=\dfrac{e^{x}}{1+\left(e^{x}\right)^2}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}=\dfrac{1}{e^{-x}+e^{x}}$

b/ $\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=\frac{1}{2}g'(x) \Rightarrow G(x)=\frac{1}{2}g(x)+\beta$. Or $G(0)=\displaystyle\int_1^{e^{0}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{1}\frac{dt}{1+t^2}=0$ d'où : $\frac{1}{2}g(0)+\beta=0$

Donc : $\frac{\pi}{4}+\beta=0 \Rightarrow \beta=-\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{G(x)=\frac{1}{2}g(x)-\frac{\pi}{4}}$

c/ $B=\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{e^{\text{Log}\sqrt{3}}}\frac{dt}{1+t^2}=G\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}g\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

$C=\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{e^{\text{Log}\frac{1}{\sqrt{3}}}}\frac{dt}{1+t^2}=G\left(\text{Log}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}g\left(-\text{Log}\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{4}$, or $I'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}'$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a $g(-x)=\pi-g(x)$ d'où : $g\left(-\text{Log}\sqrt{3}\right)=\pi-g\left(\text{Log}\sqrt{3}\right)=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

On en déduit que : $C=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$