Lycee NAHJ EL MENSEH BENI KALLED	DEVOIR DE SYNTHESE N° 2	**PR : KADDOUR ABDELHAMID**

EXERCICE N° 1(3points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous , répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{sinx}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx}\, dx$

2) L'équation 403x - 1206y = 2015 admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) Si $\begin{cases} 8x \equiv 5[mod7] \\ x \equiv 9[mod11] \end{cases}$ alors x≡ 75[mod77]

4) 10x $\equiv 10y[mod6]$ $\quad alors\ x \equiv y[mod3]$

5) $2^n + 3^n \equiv 0[mod5]$ alors n est pair

6) Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2}$, on a $\lim_{0^-} f(x) = 1$

EXERCICE N°2(3points)

Soit D une droite , A un point n'appartient pas à D et H son projeté orthogonale sur D

1) Déterminer l'ensemble(C) des foyers F des paraboles de directrice D et passant par A

2) Soit B un point de (C) et ($\wp$) la parabole de foyer B et de sommet A et de directrice D

On munit le plan d'un repère orthonormé $(A\ ,\ \vec{i}\ ,\overrightarrow{AB}\ )$

a)Montrer qu'une équation de ($\wp$) est x² = 4 y

b) Soit t > 0 . Vérifier que le point G($\sqrt{t}$, $\frac{t}{4}$) est un point de ($\wp$)

c) Ecrire l'équation de la tangente T à ($\wp$) en G

3) La tangente T coupe la directrice D en un point E

a) Déterminer les coordonnées du point E

b) Montrer que triangle BEG est rectangle en B

EXERCICE N°3(6points)

Soit f:]-1,1[$\longrightarrow IR$, x$\longrightarrow f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}dt$

1) a- Justifier l'existence de f

b- Montrer qu'il existe trois réels α ,β ,γ tels que :

$\forall\, t \in IR - \{-1 , 1\}$, $\frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}$

c) En déduire que $\forall\, x \in]-1,1[, f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

3) a- Montrer que : $\forall\, x \in IR_+^*$,$\forall\, k \in IN^*$, $lnx \leq \frac{x}{k} - 1 + lnk$

b- En déduire que $\forall\, k \in IN^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} lnx\, dx \leq lnk$ $et\ par\ suite$ $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} lnx\, dx \leq \ln(n!)$

c) Montrer que , $\ln(n!) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\ ln2$

4) Soit (ε_n) la suite définie sur IN^* par $\varepsilon_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$

a) Montrer que $\forall\, n \in IN^*$,$\varepsilon_n \geq \frac{1}{2}$ ln2

b) Vérifier que : $\forall \in IN^*$, $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = (2n+1)\, f(\frac{1}{2n+1})$

c) En déduire que (ε_n) est convergente

EXERCICE N°4 (3points)

1) a) Justifier que l'équation 9x - 5y = 1 admet des solutions

b) Donner une solution particulière de l'équation 9x -5y = 1

c) On déduire une solution particulière de l'équation (E) : 9x - 5y = 23

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l' équation (E)

2) On considère le système (S) : $\begin{cases} 7n \equiv 3[mod 9] \\ 6n \equiv 4[mod 5] \end{cases}$

a) Montrer que 7n $\equiv 3[mod 9]$ équivaut à n$\equiv 3[mod 9]$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S)

EXERCICE N°5(5points)

On donne un rectangle ABCD tel que AD = 1 , AB = $\sqrt{3}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

A) Soit f la similitude directe qui transforme A en C et D en A

1) a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

b) Déterminer le rapport et l'angle de f

c) Justifier et construire le centre Ω de f

2) On muni le plan du repère orthonormé $\mathcal{R}(A, \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

a) Soit M un point du plan d'affixe z et M' = f(M) d'affixe z', exprimer z' en fonction de z

b) En déduire les coordonnées de Ω

B) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en C et D en A . On désigne par Δ son axe et ω son centre

1) a) Préciser le rapport de g et déterminer gog(D)

b) Montrer que $\overrightarrow{\omega C} = 4\overrightarrow{\omega D}$. En déduire les coordonnées de ω *dans le repère* $\mathcal{R}$

2) a) Montrer que $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega D}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

b) Construire ω *et* Δ

3) a) Prouver que l'écriture complexe de g est $z' = (1 - i\sqrt{3})\,\overline{z} + \sqrt{3} + i$

b) En déduire l'équation cartésienne de Δ