

Rappel : Oscillation libre non Amorti

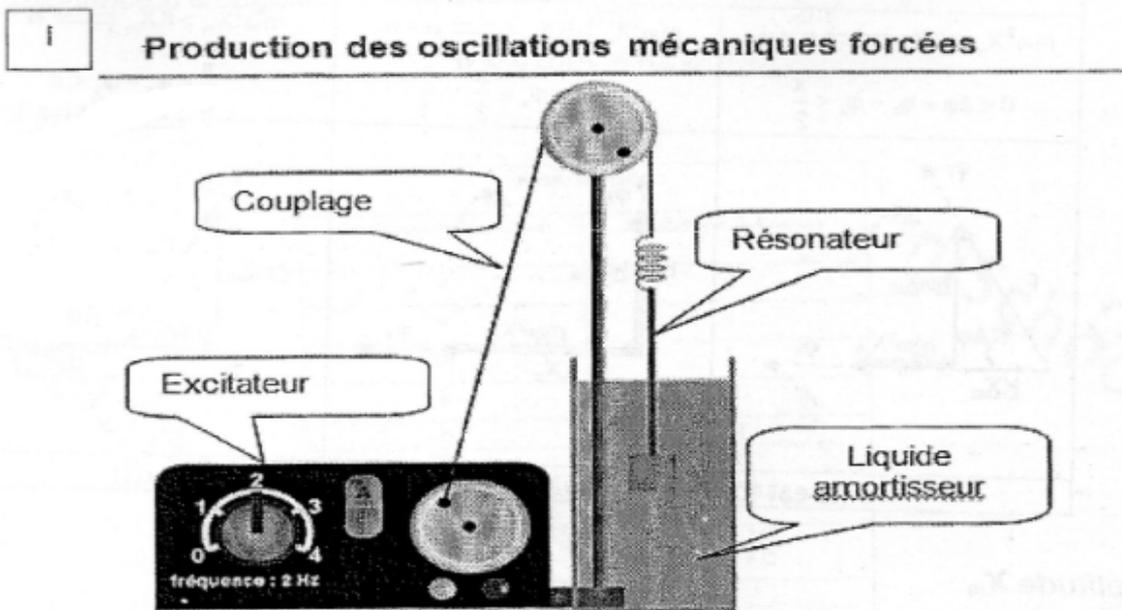
❖ L'élongation  $X$  est **sinusoïdale** périodique. subie des **oscillations** sans **diminution** d'amplitude.

❖ Les caractéristiques d'oscillation.

$$\begin{cases} N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \\ T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \\ W_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

Les oscillations forcées

A- Etude expérimentale

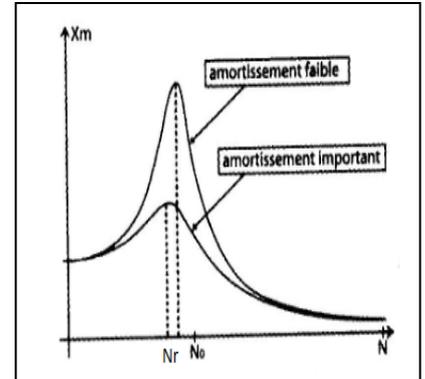
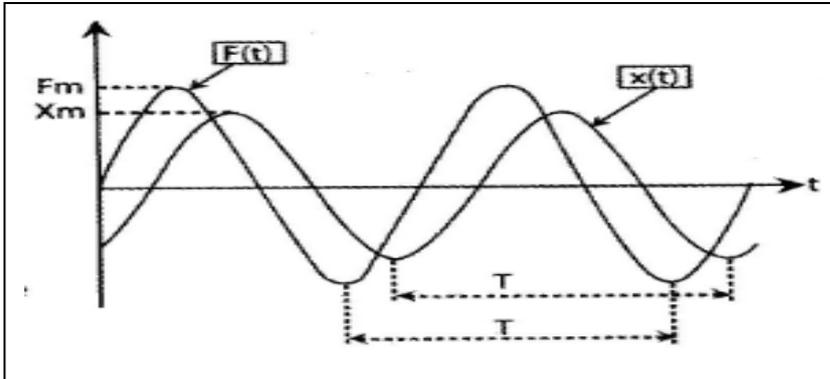


À l'aide d'un moteur (excitateur), on excite le pendule élastique (résonateur) en y appliquant une force excitatrice sinusoïdale  $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$ . En faisant varier la fréquence de l'excitateur et on mesure la fréquence d'oscillations du solide (en mesurant la durée de 10 oscillations). On trouve que la fréquence du résonateur est égale à celle de l'excitateur, on dit que les oscillations du solide sont imposées par l'excitateur. l'oscillateur n'est pas libre et les oscillations du solide sont dites forcées

➤ Lorsque Le pendule élastique est soumis à des excitations périodique de la forme  $F(t) = F_m \sin(w t + \varphi_F)$ . imposées par le dispositif d'entretien (Moteur) ou  $N$  est la fréquence de rotation, le pendule commence à osciller avec la fréquence  $N$ .

- ➔ Les Oscillations sont dite forcées.
- ➔ Le pendule se comporte comme un oscillateur qui réalise des oscillations forcées.
- ➔ Le dispositif d'entretien moteur est appelé excitateur, le pendule est appelé résonateur.

- L'expérience montre que l'élongation  $X(t)$  est une **fonction sinusoïdale périodique** du temps  $x(t) = x_m \sin (w t + \epsilon_x)$ .
- On donne les deux courbes  $X=f(t)$  et  $F=f(t)$ .  $F(t)$  est toujours en **avance de phase** par rapport à  $X(t)$ .



❖ **Influence de l'excitateur N sur l'amplitude**

- On fait **varie** La fréquence de **l'excitateur**, l'amplitude  $X_m$  atteint sa valeur **maximale** on dit alors que l'oscillateur est en **résonance d'élongation**.
- $X_m$  **augmente**, atteint un **maximum** puis **diminue**.
- A la **résonance** d'élongation ou d'amplitude c.-à-d.  $X_m$  est maximale on a  $N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8 \pi^2 m^2} \cdot (N_r < N_0)$  et  $w_r^2 = w_0^2 - \frac{h^2}{2 m^2} : (w_r < w_0)$ .

**B- Etude théorique**

**1- Equation différentielle**

❖ En applique la RFD :  $\Sigma \vec{F}_{app} = m \vec{a}$

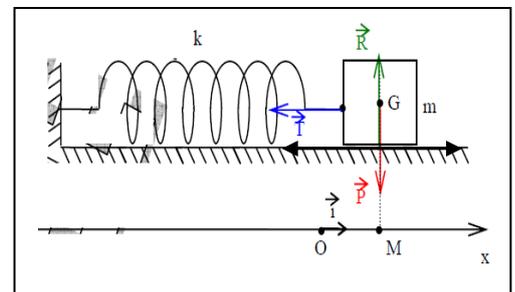
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{R} = m \vec{a}$$

❖ Par projection sur  $(x, x')$

$$-Kx - h v + F = m a \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = F$$

❖ L'équation différentielle admet comme solution

$$x = x_m \sin (w t + \epsilon_x) \quad \text{et} \quad F(t) = F_m \sin (w t + \epsilon_f)$$



**2- Les vecteurs de Fresnel**

- A la fonction  $KX(t) = K x_m \sin (w t + \epsilon_x)$ . On associe un vecteur  $\vec{V1} (K x_m , \epsilon_x)$ .
- A la fonction  $h \frac{dx}{dt} = h w x_m \sin (w t + \epsilon_x + \frac{\pi}{2})$ . On associe un vecteur  $\vec{V2} (h w x_m , \epsilon_x + \frac{\pi}{2})$ .
- A la fonction  $m \frac{d^2x}{dt^2} = m w^2 x_m \sin (w t + \epsilon_x + \pi)$ . On associe un vecteur  $\vec{V3} (m w^2 x_m , \epsilon_x + \pi)$ .

- A la fonction  $F(t) = F_m \sin(\omega t + \mathcal{E}_F)$ . On associe un vecteur  $\vec{V}$  ( $F_m$ ,  $\mathcal{E}_F$ ).

➤ Soit  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ .

3- Détermination de  $X_m$  et  $\mathcal{E}_x$  par la méthode de Fresnel

**1<sup>er</sup> cas :**  $\omega^2 < \frac{K}{m} = \omega_0^2 \Rightarrow N < N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) \in [0; \frac{\pi}{2}[ \Rightarrow \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) > 0$

$\Rightarrow \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) = \frac{h\omega}{K - m\omega^2}$

F est en avance de phase par rapport à X.

**2<sup>ème</sup> cas :**  $\omega^2 > \frac{K}{m} \Rightarrow \omega > \omega_0 \Rightarrow N > N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) \in ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \Rightarrow \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) < 0$

$\Rightarrow \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) = \frac{h\omega}{K - m\omega^2}$

F est en avance de phase par rapport à X.

**3<sup>ème</sup> cas :**  $m\omega^2 = K \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow N = N_0$

$\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x = \frac{\pi}{2}$  et  $\mathcal{E}_F > \mathcal{E}_x$ :  $X_m = \frac{F_m}{h\omega}$

F est en quadrature avance par rapport à x.

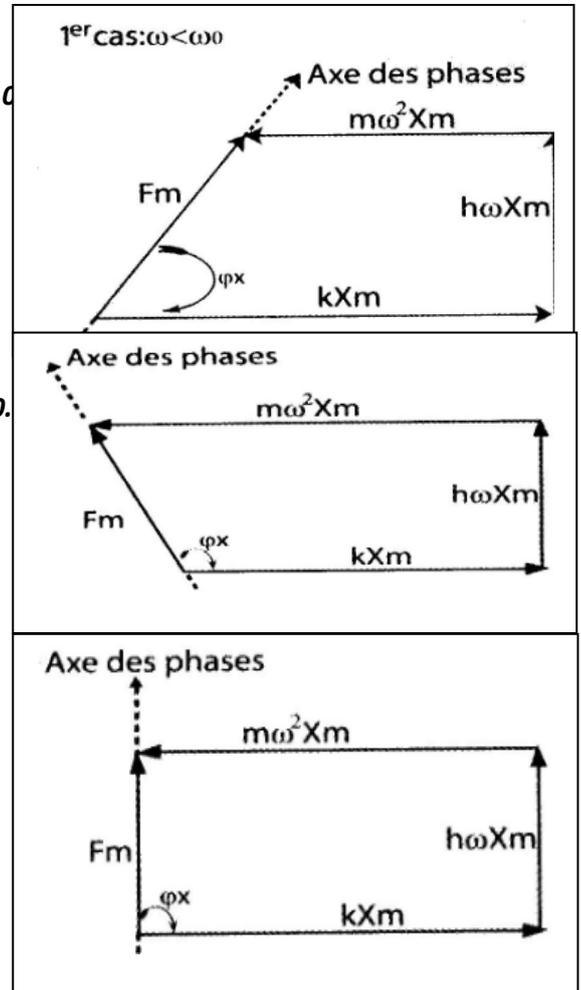
➤ D'après Pythagore

$(h X_m \omega)^2 + [K X_m - m \omega^2 X_m]^2 = F_m^2$

$\Rightarrow X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2}}$

**Remarque**  $V_m = X_m \omega = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{\omega} - m \omega)^2}}$

et  $\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_x + \frac{\pi}{2}$ .



4- Détermination de  $N_r$  à la résonance d'élongation

- À la résonance d'élongation  $X_m$  est maximal.
- Pour que  $X_m$  soit maximal il faut que  $f(\omega)$  soit minimal
- avec :  $f(\omega) = h^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2$

L'étude de  $f(\omega)$

$f'(\omega) = 2\omega [h^2 - 2m(K - m\omega^2)]$

$\omega$	0	$\omega_r$	$+\infty$
$f'(\omega)$		-	+
$f(\omega)$		→	→
$X_m$		→	→

$$f'(w) = 0 \implies w_r = 0 \text{ ou } W_r^2 = W_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \implies N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$$

➤ A' la **résonance** d'élongation ou d'amplitude c.-à-d.  $X_m$  est maximale on a

$$N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \cdot (N_r < N_0) \text{ et } w_r^2 = w_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} : (w_r < w_0).$$

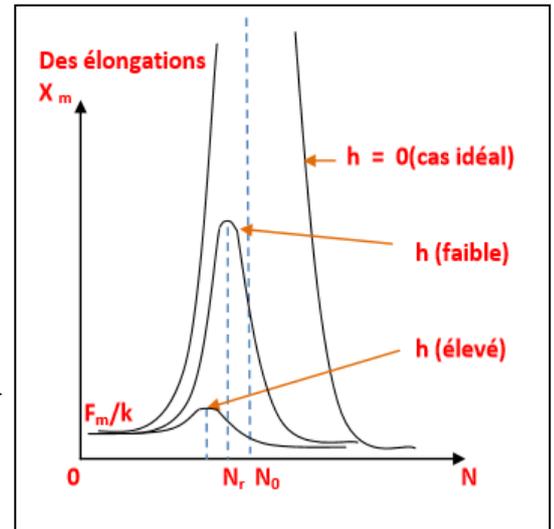
**5- L'amplitude  $X_m$  et le déphasage si  $h = 0$**   
**Cas du rupture du ressort.**

- L'équation différentielle devient :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = F$
- La construction de Fresnel

1<sup>er</sup> cas :  $m w^2 < K \implies w < w_0 \implies N < N_0$

$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_x \implies F \text{ et } x \text{ sont en phase}$

$$X_m = \frac{Fm}{(K - mw^2)}$$



2<sup>ème</sup> cas :  $m w > K \implies w > w_0 \implies N > N_0$

$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_x + \pi \implies F \text{ et } x \text{ sont en opposition de phase}$

$$X_m = \frac{Fm}{(mw^2 - K)}$$

à la **resonance** :  $X_m \longrightarrow +\infty \implies K - mw^2 \longrightarrow 0 \implies w \longrightarrow w_0$   
 $\implies N \longrightarrow N_0 \implies$  **Rupture du ressort**

**ressort**

6- Conclusion

Trois cas sont possibles :		
$m\omega^2 X_m < KX_m \iff \omega < \omega_0$ $0 < \Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x < \frac{\pi}{2}$	$m\omega^2 X_m = KX_m \iff \omega = \omega_0$ $\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$	$m\omega^2 X_m > KX_m \iff \omega > \omega_0$ $\frac{\pi}{2} < \varphi_F - \varphi_x < \pi$
F(t) est toujours en avance de phase par rapport à x(t)		

- L'amplitude  $X_m$

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2}}$$

- Le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$

$$\text{tg} \Delta\varphi = \text{tg}(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega}{K - m\omega^2}$$

7- Résonance de vitesse

a- L'équation différentielle :  $m \frac{dv}{dt} + h v + K \int v dt = F(t)$ .

$V = V_m \sin(\omega t + \mathcal{E}_v)$  et  $F = F_m \sin(\omega t + \mathcal{E}_F)$ .

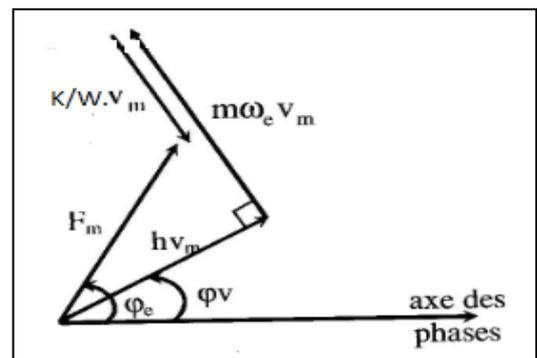
b- La construction de Fresnel

**1<sup>er</sup> cas :**  $\frac{k}{w} < m w \implies \omega_0 < w \implies N > N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) \in [0; \frac{\pi}{2}[ \implies \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) > 0$

$\text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) = \frac{m w - \frac{k}{w}}{h}$

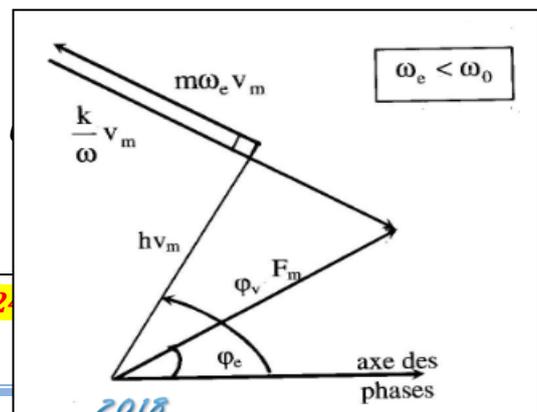
F est en avance de phase par rapport à v.



**2<sup>ème</sup> cas :**  $\frac{K}{w} > m w \implies \omega_0 > w \implies N < N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[ \implies \text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) < 0$

$\text{tg}(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) = \frac{m w - \frac{k}{w}}{h}$



*F est retard de phase par rapport à v.*

**3<sup>ème</sup> cas :**  $w = w_o \Rightarrow N = N_o$

$\epsilon_F = \epsilon_v \Rightarrow$  *F et v sont en phase.*

$V_m = \frac{Fm}{h}$ . *V<sub>m</sub> est maximale.*

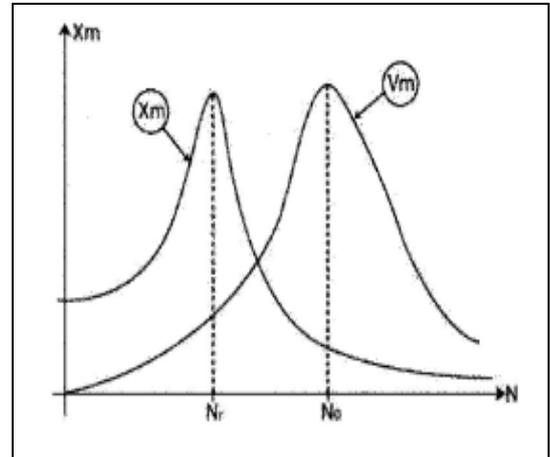
$\Rightarrow$  *C'est la résonance de vitesse.*

➤ *Pour les trois cas, et d'après Pythagore*

$$V_m = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{w} - mw\right)^2}}$$

*V<sub>m</sub> est une fonction de N*

➤ *On donne la courbe qui donne V<sub>m</sub> = f(w).*



➤ *la résonance de vitesse a lieu lorsque la fréquence l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur.*

➤ *l'amplitude V<sub>m</sub> est maximale V<sub>m</sub> = Fm/h et ε<sub>F</sub> = ε<sub>v</sub> Pour N = N<sub>o</sub>.*

**Remarque :**  $X_m = \frac{V_m}{w} = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 w^2 + \left(\frac{k}{m} - mw\right)^2}}$   $\epsilon_x = \epsilon_v - \frac{\pi}{2}$ .

**8- Puissance moyenne absorbé par le résonateur**

➤  $P = \frac{Fm \cdot V_m}{2} \cos(\epsilon_F - \epsilon_v)$  avec  $\cos(\epsilon_F - \epsilon_v) = \frac{h \cdot V_m}{Fm} = \frac{h}{Z}$

avec  $Z = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{w} - mw\right)^2}$  et  $F_m = h V_m$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2} h V_m^2$

➤ *A' la résonance de vitesse, V<sub>m</sub> est maximale c-a-d N = N<sub>o</sub>.*

$V_m = \frac{Fm}{h} \Rightarrow P_{max} = \frac{1}{2h} F_m^2$ .

**9- Remarques très important.**

❖ *A' la résonance de vitesse N = N<sub>o</sub> on a*  $\begin{cases} V_m = \frac{Fm}{h} \\ v = F \end{cases}$ .

➤ *Le vecteur de Fresnel associe au force de frottement est f (f<sub>m</sub> = h V<sub>m</sub> : ε<sub>f</sub> = ε<sub>v</sub> + π) car f = -h v*

➤ *Le vecteur de Fresnel associe au force moteur est F (F<sub>m</sub> = h V<sub>m</sub> : ε<sub>F</sub> = ε<sub>v</sub>).*

$\Rightarrow \begin{cases} f_m = Fm \\ f = F + \pi \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{f} \Rightarrow \vec{F} \text{ et } \vec{f} \text{ sont directement oppose.}$

$\Rightarrow$  *F(t) et f(t) sont en opposition de phase et ayant la même amplitude.*

$\Rightarrow$  *L'équation différentielle devient : m d<sup>2</sup>x/dt<sup>2</sup> + Kx = 0*

$\Rightarrow$  *Le pendule se comporte comme un oscillateur libre non amortie.*

❖ Valeur limite du coefficient de l'amortissement  $h$ .

➤ A la résonance d'élongation on a  $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$ .

➤ Pour qu'il y a résonance d'élongation il faut que

$$\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \geq 0. \implies h \leq \sqrt{2mk} \implies h_{\text{limite}} = \sqrt{2mk}.$$

❖ Résonance d'élongation et de vitesse.

Résonance d'élongation	Résonance de vitesse
$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2}}$ <p>Condition de résonance :</p> $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$ $N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$	$V_m = \omega X_m \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{\omega} - m\omega)^2}}$ $\omega_r^2 = \omega_0^2$ $N_r^2 = N_0^2$
<p>La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence <math>N_r &lt; N_0</math> à laquelle il y a une résonance de vitesse.</p>	