EXERCICES

Primitives et Calcul Intégral

I- Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en O.
Montrer que si f est paire, alors la primitive F de f qui s'annule en O sur I est impaire (Indication : étudier la fonction g : x x F(-x) + F(x)); et si f est impaire, alors toute primitive F de f sur I est paire. (Etudier h : x x F(-x) - F(x)).

II- Soit f_n la fonction définie par $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ où $n > 1$. Déterminer la primitive F_n de qui s'annule en 1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(\frac{1}{2})$

III- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.
1° Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'il existe deux constantes a et b (que l'on déterminera) telles que $f''(x) + a\, f(x) = b \sin x$ pour tout x.
2° En déduire une primitive de f.

IV- Soit F la fonction définie sur IR par

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée f.
2. f est-elle continue ?

V- Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Justifier et calculer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

VI- 1° Soit l un nombre réel strictement positif. Calculer $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3}$.
Calculer la limite éventuelle de I(l) lorsque l tend vers +°.

YOUSSEFBOULILA

2° Même question avec $I(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

VII- 1- a) Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt$ est définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation de f.

2- Mêmes questions pour $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ et $f(x) = \int_x^3 \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

VIII – Soir (u_n) la suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. On se propose d'établir que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$. Soit la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

A – 1° Justifier la dérivabilité de F et calculer F′.

2° Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par u (x) = F (tan x). Calculer u′(x) pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que u(x) = x pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

B- 1° Montrer que, pour tout réel t : $(1-t^2+t^4+\dots+(-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2° En déduire, à l'aide d'une intégration, que : $u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

3° Montrer que pour tout réel t de [0 , 1], on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n+2}$. (1)

En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \le \frac{1}{2n+3}$. Conclure.

IX –1 – Calculer la valeur moyenne de a) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur [0,8]

b) $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur [1,2] puis sur $[\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

X – Déterminer pour $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$ une primitive F telle que

$F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4}$

XI - Calculer $\int_a^t \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$. En déduire , en effectuant une intégration par parties

$I = \int_a^t \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

XII - Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) En effectuant une intégration par parties, montrer que pour $n \geq 2$ $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

En déduire I_{2p} et I_{2p+1}

3) Montrer que (I_n) est décroissante.

4) En utilisant les inégalités $I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$., trouver la limite de $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ quand n tend vers $+\infty$

5) Montrer que pour tout n au moins égal à 1, $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

En déduire les limites de I_n et $I_n\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$

XIII - 1) Soit f une application de R dans R , continue sur R et u et v deux applications de R dans R, dérivables sur R. Soit g l' application de R dans R définie pour tout réel x par :

$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Démontrer que g est dérivable sur R et que l'on a ,pour tout x de R,

$g'(x) = v'(x)f[v(x)] - u'(x)f[u(x)]$.

$g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

2) <u>Application</u>

a) les hypothèses du 1) sont-elles vérifiées ?

b) Calculer g'(x) pour tout réel x.

c) Déterminer le sens de variation de g.

XIV - Soit f l'application de $]-1;+\infty[$ définie par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ pour tout x de $]-1;+\infty[$

1) Calculer f'(x) et déterminer le sens de variation de f

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout n de N par $u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$

a) Démontrer que (u_n) est croissante.

b) Démontrer les inégalités suivantes : $u_1 < 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} < \int_1^n \frac{dt}{t^3}$

En déduire que (u_n) est convergente.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}dx$$

XV- On considère la suite (I_n) définie pour tout entier n par :

1- Calculer I_0.

2- Etude de (I_n) :

a) Montrer que pour tout n , I_n est positif ou nul.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

d) Montrer que $\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n+1)}$.

e) En déduire la limite de (I_n).

XVI- Etude de la fonction F : $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

1- Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est continue sur IR.

En déduire l'existence de la fonction F : $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

Par extension, on notera $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

2- Etudier la parité de F.

3- Quel est le sens de variation de F sur les intervalles $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ $n \in$ IN, et sur les intervalles $[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$, $n \in$ IN ?

4- Sachant que pour tout xÎ[0,1], $\in x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$, montrer que pour tout xÎ[0,1] $x - \frac{x^3}{18} \leq F(x) \leq x$

5- Tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour $x \in [-1,1]$

6- Soit $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}dx$. a) Montrer que $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi+t)}{n\pi+t}dt$

b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $a_{2n-1} \leq a_{2n+1} \leq 0 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n}$

c) Montrer que $\forall n > 0$, $0 < a_{2n} + a_{2n+1} \leq \frac{1}{4n^2}$

7- a) Montrer que pour tout $n > 1$, $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^2}$

b) En déduire que la suite (S_n) définie par : $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ converge.

c) Montrer que $\sin x < x$ pour tout $x > 0$. En déduire un encadrement de a_0.

8- a) Déduire de la question précédente que la suite (I_n) définie par

$I_n = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ (n ÎIN) est croissante et convergente.

a) Montrer que si x ∈ [(2n+1)p, (2n+2)p]avec n∈ IN, alors $I_n \leq F(x) \leq I_{n+1}$

b) Montrer que si x ∈ [2np, (2n+1)p] avec ∈n IN, alors $I_n \leq F(x) \leq I_n + \frac{1}{2n}$

En déduire que F est positive sur $\mathbb{R}^+$, et que F admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et quand x tend vers $-\infty$.

YOUSSEFBOULILA