EXERCICES DE REVISION

EXERCICE I

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

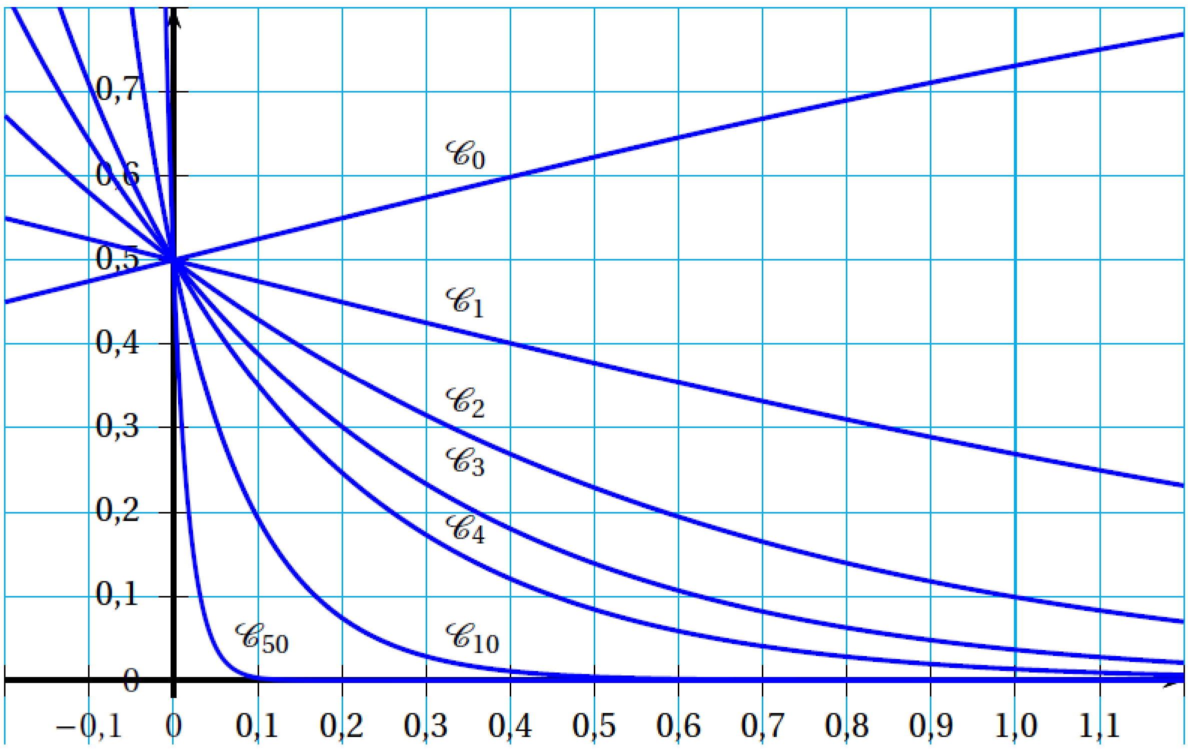
$$f_n(x) = \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{x}}.$$

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté ci-dessous les courbes C_n pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.

2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Proposer, à l'aide du graphique ou de la calculatrice, une valeur approchée de u_4 à 0,05 près.

Partie B – Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x) = e^{-nx}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
   b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;1]$.

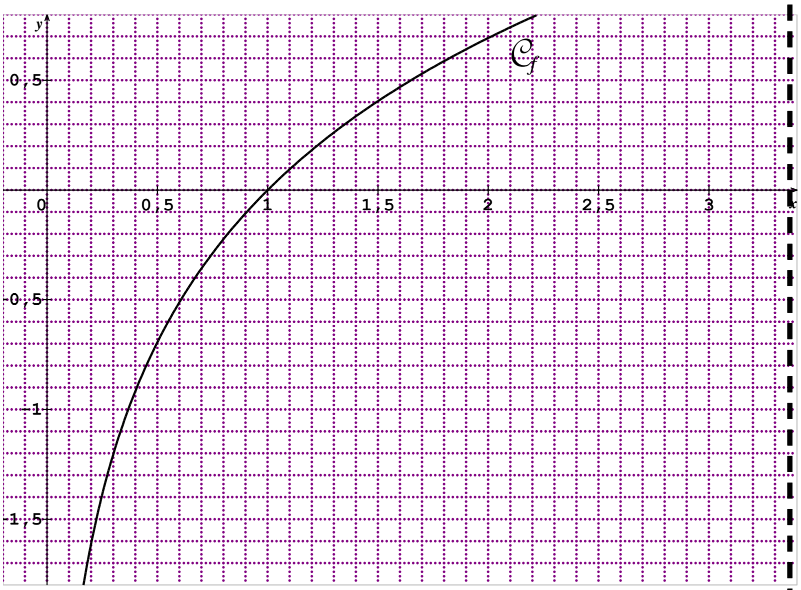
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$$
   b. En déduire la valeur de l

EXERCICE II

On s'intéresse à la plus courte distance entre la courbe représentative de la fonction ln et l'origine du repère orthonormé dans lequel elle est représentée.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
M un point situé sur C_f et on note x l'abscisse de ce point.
Soit d la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à x associe la distance OM.



Partie A –

Il existe une valeur minimale de $d(x)$ atteinte en un reel x_0.
Par lecture graphique, donner un encadrement à 0,1 près de la valeur de x_0.

Partie B –

1) Montrer que $d(x) = \sqrt{x^2+(\ln x)^2}$ pour tout x réel strictement positif.
2) a) Calculer $d(x)$.

b) Montrer que, pour x réel strictement positif, le signe de $d(x)$ est le même que celui de $x^2 + \ln x$.

3) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b) Etudier les variations de g sur $]0 ; +\infty[$.

c) Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

d) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α.

e) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

4) a) En déduire le tableau de variation de la fonction d sur $]0 ; +\infty[$.

b) Justifier que $\alpha = x_0$.

c) Montrer que $\ln \alpha = -\alpha^2$, puis que $d(\alpha) = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

5) En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de la distance la plus courte entre l'origine du repère et C_f

Partie C –

On note T la tangente à la courbe C_f au point M.

1) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de T et (OM) lorsque la distance OM est minimale ? Tracer cette tangente sur le sujet (ne pas reproduire la figure).

2) a) Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe C_f au point d'abscisse α.

b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (OM) lorsque OM est minimale.

c) Démontrer la conjecture de la question 1.

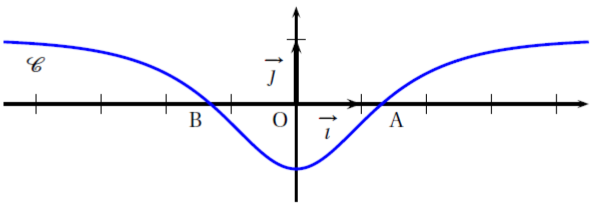
EXERCICE III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe C. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^{2}}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe C.

Démontrer que cette conjecture est vraie.

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^{a}$.

a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.

En déduire la valeur exacte de a.

b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur **R** par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur **R**.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leq F(a) \leq 0$.

3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$.

b. En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geq x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

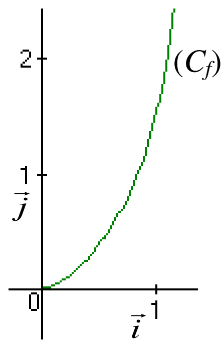
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

EXERCICE IV

1°) Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2°) Soit la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$:

On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$, la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{4}$ et la courbe (C_f).



Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm^3.

EXERCICE V

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}\,e^{-x}$.

Pour tout $\alpha > 1$, on considère l'intégrale : $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx$.

1°) Interpréter géométriquement le nombre $I(\alpha)$.

2°) Démontrer que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $e^{-x} \leq f(x) \leq x\,e^{-x}$.

3°) En déduire que pour tout $\alpha > 1$:

$$e^{-\alpha} - e^{-2\alpha} \leq I(\alpha) \leq (\alpha + 1)\,e^{-\alpha} + (-1 - 2\alpha)\,e^{-2\alpha}.$$

4°) Rappel : « Une fonction g admet une limite égale à l en $+\infty$ » signifie :
« Pour tout intervalle ouvert I contenant l, on peut trouver un réel A tel que : I contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x supérieur ou égal à A. »

Démontrer le théorème suivant :
« Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ telles que :
pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$, et soit l un réel.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$. »

5°) En déduire la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.