| Lycée Houmet Souk | Devoir de Synthèse N : 1 | 3 Mathématique 1 |
|---|---|---|
| Prof : Loukil Mohamed | Durée : 2 Heures | 22 Janvier 2018 |

## EXERCICE N : 1 ( 3 points )

On considère , dans le plan muni d'un repère orthonormé , la parabole **( P )** d'équation : $y = x^2$ .

Soit $M ( x , x^2 )$ un point de **( P )** et **D** la fonction définie sur IR par : **D** $( x ) = AM^2$ avec **A** $( 3 , 0 )$ .

**1 )** Montrer que pour tout $x \in IR$ ; **D** $( x ) = x^4 + x^2 - 6x + 9$ .

**2 )** Vérifier que pour tout $x \in IR$ ; **D'** $( x ) = 2 ( x - 1 ) ( 2x^2 + 2x + 3 )$ .

**3 ) a )** Dresser le tableau de variations de la fonction **D** .

**b )** On désigne par **B** le point de la parabole **( P )** le plus proche de **A** .
Déterminer les coordonnées de **B** .Expliquer

## EXERCICE N : 2 ( 6 points )

**A )** Soit la fonction $f$ définie par : $f ( x ) = \dfrac{a x^2 - 3x + b}{x - 1}$ .

On désigne par **( C f )** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $R ( O , \vec{i} , \vec{j} )$ .

**1 )** Calculer , en fonction de a et b , $f'( x )$ pour tout $x \in D_{f'}$ .

**2 )** Déterminer les réels a et b , pour lesquelles , **( C f )** passe par $A ( 0 , - 6 )$ et $f$ admette un extremum en - 1 .

**B ) On prend pour la suite : a = 1 et b = 6** .

**1 )** Dresser le tableau de variations de f .

**2 )** Préciser les extremums de $f$ et leur nature .

**C )** Soit la fonction g définie sur IR par :
$$\begin{cases} g( x ) = 4 + ( 2 - x )\sqrt{2 - x} & \text{si} \quad x < 2 \\ g( x ) = f ( x ) & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

On désigne par **( C g )** la courbe représentative de $f$ dans le repère orthonormé $R ( O , \vec{i} , \vec{j} )$ .

**1 )** Montrer que $g$ est continue en 2 .

**2 ) a )** Etudier la dérivabilité de $g$ en 2 .

**b )** Donner des équations cartésiennes des demi-tangentes à **( C g )** au point B d'abscisse 2 .

**3 )** Montrer que g est dérivable sur $] - \infty ; 2 [$ et que pour tout $x \in ] - \infty ; 2 [$ ; $g'( x ) = - \dfrac{3}{2} \sqrt{2 - x}$ .

**4 )** Dresser le tableau de variations de $g$ sur IR .

## EXERCICE N : 3 ( 6 points )

**A )** Soit $h$ la fonction définie sur $[\,0\,,\pi\,]$ par : $h(x) = a\cos 2x + b\cos x - \frac{1}{2}$ où a et b sont deux constantes. On désigne par **( Ch )** la courbe représentative de $h$ dans un repère orthonormé .

**1 )** Calculer pour tout $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $h'(x)$ en fonction de $a$ et $b$ .

**2 )** Déterminer les réels a et b pour lesquels $h$ admette un extremum en $\frac{2\pi}{3}$ égale à $-2$ .

**B )** Soit $f$ la fonction définie sur $[\,0\,,\,\pi\,]$ par : $f(x) = \cos 2x + 2\cos x - \frac{1}{2}$ .

**1 )** Montrer que pour tout $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - \frac{3}{2}$ .

**2 ) a )** Résoudre dans $[\,0\,,\,\pi\,]$ l'équation : $f(x) = 0$ .

**b )** Résoudre dans $[\,0\,,\,\pi\,]$ l'inéquation : $2\cos x + 1 \geq 0$ .

**3 ) a )** Montrer que pour tout $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $f'(x) = -2\sin x\,(1 + 2\cos x)$ .

**b )** Etudier les variations de $f$ .

**c )** Déduire le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [\,0\,,\,\pi\,]$ .

**4 )** Calculer : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos 2x + 4\cos x - 1}{6x - 2\pi}$ .

## EXERCICE N : 4 ( 5 points )

**A )** Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ .

On considère les points A et B et C d'affixes respectives $Z_A = -2$ , $Z_B = -1 + i$ et $Z_C = i$ .

Soit $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P$ ; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \frac{iZ + i + 1}{Z + 2}$ .

**1 ) a )** Vérifier que : $Z' = \frac{i\,(Z + 1 - i)}{Z + 2}$ .

**b )** Déterminer la nature de l'ensemble ( $\Delta$ ) des points M tels que $|Z'| = 1$ .

**c )** Déterminer la nature de l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M tels que $Z'$ est un réel .

**2 ) a )** Vérifier que pour tout $Z \neq -2$ on a : $Z' - i = \frac{1 - i}{Z + 2}$.

**b )** En déduire que pour tout $M \neq A$, on a : $CM' \cdot AM = \sqrt{2}$ et $(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{CM'}}) + (\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM}}) \equiv -\frac{\pi}{4}\,(2\pi)$ .

**c )** Prouver alors que si M appartient au cercle **( $\mathscr{C}$ )** de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle **( $\mathscr{C}'$ )** dont on précisera le centre et le rayon .

**3 )** Soit E le point d'affixe $Z_E = -\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

**a )** Vérifier que : $Z_E - Z_A = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$ .

**b )** En utilisant la questions **2 )** , construire le point $E' = f(E)$ .

Bonne chance