EXERCICES PROBABILITES

PROBABILITES CONDITIONNELLES

I- Deux urnes U_1 et U_2 de même apparence extérieure contiennent respectivement :

U_1 : 3 boules rouges et 2 boules vertes

U_2 : 2 boules rouges et 1 boule verte

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1° Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2° On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

II- Dans une ville donnée, 40 % de la population a les cheveux blonds, 50 % les yeux bleus et 35 % à la fois les cheveux blonds et les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.

Quelle est la probabilité :

a) pour qu'elle ait les yeux bleus, sachant qu'elle a les cheveux blonds ?

b) pour qu'elle n'ait pas les cheveux blonds, sachant qu'elle a les yeux bleus ?

III- On lance deux fois de suite un dé tétraédrique portant sur ses faces les nombres 1, 2, 3 et 4 (les sorties sont équiprobables).

Soit A l'événement "le second nombre sorti est strictement inférieur au premier". On se propose de calculer P(A) de deux manières.

1. Soit W l'ensemble des issues (i, j) avec 1 £ i £ 4 et 1 £ j £ 4 et E_k l'événement "k sort au premier lancer" pour k = 1, 2, 3, 4.

a) Montrer que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{4} P(A \cap E_k)$$

b) Calculer $P(A/E_k)$, $P(E_k)$ et en déduire P(A).

2. Utiliser un arbre et marquer les probabilités sur chaque branche. 1 £ i £ 4

IV- Trois machines fabriquent des ampoules électriques dans les proportions suivantes : 20 % pour la machine A, 50 % pour la machine B et 30 % pour la machine C. Les fiabilités respectives des machines A, B et C sont 0,9 ; 0,95 ; et 0,8(autrement dit : la probabilité pour qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est 0,9 ....)

On achète une ampoule; elle est bonne. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A?

(Indication : Soit E l'événement : "l'ampoule est bonne ".

Calculer P(E) par la formule des probabilités totales (arbre) et $P(A / E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$)

V- Au cours d'un examen de math, trois professeurs A, B et C sont susceptibles de poser le sujet. On évalue respectivement à 0,35 ; 0,40 et 0,25 la probabilité que A, B et C posent respectivement le sujet. Par ailleurs, on estime à 0,1 la probabilité que "sort" sur les probabilités conditionnelles, si A qui pose le sujet, à 0,4 si c'est B et à 0,82 si c'est C.
Le jour de l'examen, le sujet comporte une question sur les probabilités conditionnelles.
Quelle est la probabilité que le sujet ait été posé par A ? par B ? par C.

VI- Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont la maladie M_b.
On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :
"l'individu est atteint de la maladie M_a"
"l'individu est atteint de la maladie M_b"
$\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A, $p_A(B)$ désigne la probabilité de "B sachant A"
1- Donner les valeurs de p(A), $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(B)$.
2- Calculer p (B Ç A) et $p(B \cap \overline{A})$. en déduire p(B).
3- Calculer p_B (A).

VII- Un même individu peut être atteint de surdité unilatérale (portant sur une seule oreille) ou bilatérale (portant sur les deux oreilles). On admet que, dans une population donnée, les deux événements :
D : " être atteint de surdité à l'oreille droite" et
G : " être atteint de surdité à l'oreille gauche"
sont indépendants et tous deux de probabilité 0,05 ce que l'on note : p(D) = p(G) = 0,05.
On considère les événements suivants :
B : " être atteint de surdité bilatérale"
U : " être atteint de surdité unilatérale"
S : " " être atteint de surdité (sur une oreille au moins)"
1- Exprimer les événements B et S à l'aide de G et de D, puis calculer les probabilités p(B) de B et p(S) de S
En déduire la probabilité p(U) de U.
2- Sachant qu'un sujet pris au hasard dans une population considérée est atteint de surdité, quelle est la probabilité :
a) Pour qu'il soit atteint de surdité à droite ?

a) Pour qu'il soit atteint de surdité bilatérale ?
Les deux événements "B sachant S" et "G sachant S" sont-ils indépendants ?

VIII- On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 », D_2 : « le dé indique 2 »,
D_3 : « le dé indique 3 », G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.
b. Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

VARIABLES ALEATOIRES

1- On considère la variable aléatoire X qui prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$.
1° Donner le tableau et le graphique de la loi de probabilité.
2° Donner le tableau et le graphique de la fonction de répartition.

2- On lance deux pièces non truquées et l'on note X la v.a. relative au nombre de "faces" obtenu par ce lancer;

1° Donner la loi de probabilité et la fonction de répartition de X.

2° Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

3- On considère pour une v.a. X la loi de probabilité définie par le tableau :

valeurs x_i de X	0	1	2	3	4	5
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

4- On considère la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par le tableau suivant :

x_i	784 3	784 5	784 7	784 9	785 1
P i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

1° Déterminer la loi de probabilité de la v.a. : $Y = \frac{X - 7847}{2}$.

2° Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.

5- Une loterie est composée de 1000 billets. L'un d'entre eux gagne le gros lot qui est de 500000 F ; deux autres gagent 100000 F ; cinquante autres billets gagnent 10000 F. Quel doit être le prix du billet pour que le jeu soit équitable ?

6- Deux joueurs A et B misent respectivement une pièce de 50 f et une pièce de 10 F et jouent de la manière suivante : A prend les deux pièces, les lance et, après leur retombée sur le tapis, les ramasse si la sienne présente le côté "face" ou ramasse seulement celle de B si cette dernière est la seule à présenter le côté "face". B garde la ou les pièces restant éventuellement.

1° X et Y étant les v.a. gain de A et gain de B, donner leurs lois de probabilités et leurs espérances mathématiques.
2° Le jeu est-il équitable ?

7- Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9 indiscernables au toucher.
1° On tire au hasard simultanément 3 jetons du sac (on se place dans l'hypothèse d'équiprobabilité).
On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de numéros impairs figurant parmi les 3 numéros d'un tirage.
a) Donner la loi de probabilité de X.
Calculer son espérance mathématique et sa variance.
b) Quelle est la probabilité pour que la somme des 3 numéros d'un tirage soit paire ?

8- Un sac contient 8 jetons numérotés. Trois portent le numéro 1, deux autres le numéro 2, deux autres le numéro 5 et enfin un seul porte le numéro 10.
On tire simultanément deux jetons du sac. Tous les tirages de deux jetons sont équiprobables.
1° a) Quelle est la probabilité de tirer deux jetons portant le même numéro ?
b) Quelle est la probabilité de tirer deux jetons portant tous les deux un numéro impair ?
2° Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirages de deux, associe la somme des numéros de ces jetons.
a) Préciser l'ensemble des valeurs de la variable X.
b) Déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique.

9- Soit n un entier naturel au moins égal à 4. D'une urne contenant n boules blanches et n boules moires, on extrait simultanément 4 boules.
On admet que tous les tirages de 4 boules sont équiprobables et l'on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.
1° Donner la loi de probabilité de X.
2° Calculer l'espérance mathématique et montrer que c'est indépendant de n.
3° Pour $n \geq 4$ on pose $u_n = p(X=2)$. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?

10- Un sac contient 4 jetons noirs et 4 jetons blancs ; on tire 4 jetons du sac. On suppose que les différents tirages sont équiprobables.

Soit n le nombre de jetons noirs tirés et soit la variable aléatoire $X=2n-4$.
1° Dans une première expérience, on tire les quatre jetons simultanément ; déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

2° Dans une deuxième expérience, on tire les quatre jetons, l'un après, avec remise ; déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart-type.

11 – Un joueur de tennis effectue une mise une jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service.

La probabilité pour que le premier service réussisse est $\frac{2}{3}$; s'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième service réussisse est $\frac{4}{5}$.

Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a "double faute" ; sinon la mise en jeu est réussie.

1° a) Déterminer la probabilité pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une double faute.

b) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

2° Ce joueur participe à un entraînement publicitaire organisé par son club et patronné par un magasin de sport. Il s'agit, pour lui, d'effectuer 10 mises en jeu successives (dont les résultats sont indépendants les uns des autres). Chaque mise en jeu réussie lui permet de gagner une balle. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de balles gagnées.

a) Exprimer p(X=k) en fonction de k entier entre 0 et 10.

Donner des valeurs numériques approchées de p(X=9) et p(X=10).

b) Déterminer la probabilité pour que ce joueur gagne au moins 9 balles.

c) Calculer E(X).

12 – Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6

P (X=i)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2 francs ; il reçoit 12 francs si les portes 1 ou 6, 2 francs si elle franchit les protes 3 ou 4. les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise.

1° Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie.

a) Quelles sont le valeurs possibles de Y ?

b) Déterminer la loi de probabilité de Y.

c) Le jeu est-il équitable ? (un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain est nulle.)

2° Un joueur fait 5 parties successives, dont les issues sont supposées indépendantes.

Donner sous forme décimale au millième près :

a) la probabilité que le gain total du joueur à l'issue des cinq parties soit nul ;

b) la probabilité que le joueur reçoive au moins une fois 12 francs.

13- Pour un libraire, le nombre d'exemplaires d'une certaine revue qu'il vend par semaine définit une v.a. X dont l'observation a permis de préciser la loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4
p (X= x_i)	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

1° Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
2° Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3° Chaque exemplaire vendu par le libraire lui rapporte un bénéfice de 2000 F ; par contre, chaque exemplaire invendu doit être retourné à l'éditeur en fin de semaine et entraîne une perte de 500 F. Sachant que le libraire commande quatre exemplaires chaque semaine, calculer l'espérance mathématique de son bénéfice pour une semaine.

4° Le libraire commande n exemplaires par semaine. Pour quelle valeur de n l'espérance de bénéfice est-elle maximale ?

14-Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. Un candidat répond chaque fois au hasard (on suppose donc l' équiprobabilité des réponses).

On note V une réponse correcte et F une réponse incorrecte, exemple : VFFV signifie que la première et la quatrième réponses sont correctes et la deuxième et la troisième sont incorrectes.

1. Etablir la liste des seize résultats possibles (que l'on pourra présenter à l'aide d'un arbre).

2. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne la bonne réponse :

a. à la première question posée?

b. à une seule des quatre questions posées ?

c. aux quatre questions posées ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat.

a. Donner les différentes valeurs prises par X.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

4. Un candidat sera reconnu apte s'il donne au moins trois réponses correctes. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard soit reconnu apte ?

15 . Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C_1 : "L'enfant choisit la boîte cubique",

C_2 : "L'enfant choisit la boîte cylindrique",

R : "L'enfant prend une bille rouge",

V : "L 'enfant prend une bille verte".

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'événement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de *n* pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$.

16 - Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 1000 F; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 150 F et si une seule est rouge il gagne 40 F. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2°) Pour un jeu, la mise est de 100 F. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 100 ?

3°) Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions:

_ soit augmenter la mise de 10 F, donc passer à 110 F,

_ soit diminuer chaque gain de 1 F, c'est-à-dire ne gagner que 990 F, 140 F ou 30 F.

Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

PROBABILITES (loi binomiale)

Exercice 1 Combien de fois faut-il lancer un dé normal pour amener un ou plusieurs six avec une chance sur deux au moins ?

Exercice 2 a. On lance deux dés, puis on totalise les points marqués. Quelle est

la probabilité d'avoir un total supérieur ou égal à 8 ?
b. Au bout de 20 lancers, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 10 fois exactement un total supérieur ou égal à 8 ?

Exercice 3 A chaque tir, la probabilité pour qu'un tireur touche la cible est 0,7. Il tire trois fois de suite. Les trois tirs sont supposés indépendants.
Quelles sont les probabilités :
p_1 pour qu'il touche la cible trois fois ?
p_2 pour qu'il touche la cible deux fois exactement ?

Exercice 4 Un appareil, fabriqué en très grande série, peut être défectueux à cause de deux défauts désignés par A et B. Le pourcentage des appareils présentant le défaut A est de 10%, celui des appareils présentant le défaut B est de 8%, le pourcentage des appareils présentant les 2 défauts simultanément est de 4%.
1. Un client achète un des appareils produits. Calculer :
a) la probabilité p_1 pour que cet appareil ne présente aucun défaut.
b) la probabilité p_2 pour qu'il présente le défaut A seulement.
c) la probabilité p_3 pour qu'il présente le défaut B seulement.
2. Un 2-ième client achète 10 appareils produits. Calculer :
a) la probabilité p_4 pour que les 10 appareils soient tous sans défauts.
b) la probabilité p_5 pour qu'un seul des 10 appareils soit défectueux.

Exercice 5 Une urne contient 3 boules blanches et x rouges indiscernables au toucher. On choisit simultanément et au hasard 2 boules dans cette urne. On appelle "succès" le fait d'obtenir 2 boules blanches.
1. Trouver en fonction de x la probabilité p d'un succès.
Déterminer x pour que $p=0,2$.
2. On suppose dans toute la suite que $x = 3$.
a) On recommence 4 fois le tirage précédent en ayant remis à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès au cours des 4 tirages.
b) Déterminer le nombre minimum n d'épreuves qu'il faut effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un succès au cours de ces n épreuves soit supérieur à 0,9.

Exercice 6 On vise un cible en lançant, de manières indépendantes, n projectiles. Chaque projectile a la probabilité p $(0<p<1)$ d'atteindre la cible. On considère les événements suivants :
A : "aucun projectile n'atteint la cible"

B : "au moins un projectile atteint la cible".

On note P(A) et P(B) les probabilités de ces événements.

1. Exprimer P(A) en fonction de n et p. En déduire l'expression de P(B)

2. On souhaite avoir $P(B) \geq 0{,}999$. On s'intéresse au nombre minimal m de projectiles à lancer pour réaliser cette condition.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) On suppose $p = 0{,}87$. Que vaut m ?

b) On suppose $m = 3$. Dans quel intervalle doit se trouver p ?

Exercice 7

Sur une publicité, une loterie annonce : "1 billet sur 3 est gagnant. Achetez 3 billets". Le texte suggère qu'en achetant 3 billets, on est sûr de gagner.

Appelons 3n le nombre de billets mis en vente ($n \in \mathbb{N}^*$). On achète 3 billets. On suppose que tous les ensembles de 3 billets ont la même probabilité d'être achetés

1. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?
2. Quelle est la probabilité p d'avoir 1 billet gagnant sur les 3 ?
3. Pour quelles valeurs de n on a $p \geq 0{,}5$? $p \geq 0{,}75$?