EXERCICES SIMILITUDES PLANES

Exercice 1 - On considère, dans le plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2 AB et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On désigne par F la projection orthogonale de A sur (BC), I = $S_{(AB)}(F)$ et J = $S_{(AC)}(F)$

1 – a) Montrer que $(BI)\perp(AI)$ et $(CJ)\perp(AJ)$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ et en déduire que A = I * J.

2 – Soit S la similitude direct qui transforme B en A et A en C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S. YOUSSEF BOULILA

b) Montrer que F est le centre de S.

c) Montrer que : S(I) = J. En déduire que CJ = IJ.

3 – Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en F et F en J.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Déterminer Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\overrightarrow{\Omega I}$.

c) Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\overrightarrow{\Omega I}$.

Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de [EF].

Exercice 2- OAB est un triangle isocèle tel que OA = OB et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1 – Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2 – a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J la projeté orthogonal du point O sur (AC)

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.

3 – Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).

b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.

4 – Soit I ' = f(I) et J ' = g(J).

a) Déterminer les images des points J et I ' par $g \circ f^{-1}$.

b) Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice 3 - Soit un triangle ABC non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, à tout point m de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan ouvert de bord (BC) et BM=CN.

1- Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que pour tout point M de (AB) on a r(M) = N et r(B) = C.

Préciser une mesure de son angle et construire son centre I.

2- Soit O = B*C et $S_{(OI)}$ est le symétrie orthogonale d'axe (OI), h est l'homothétie de centre I et de rapport 2. On considère l'application $f = h \circ S_{(OI)} \circ r$.

a) Déterminer f(B) et f(I).

b) Démontrer que f est une similitude indirecte dont on précisera l'axe, le centre et le rapport.

c) Soit M' l'image de M par f. Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit la droite (AB) \ {A} et le construire.

d) Soit H = M*N. Déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit la droite (AB) \ {A}.

Exercice 4 - Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : a = 2, b = 2+3i, c = 3i, d = $-\frac{5}{2}$ +3i et e= $-\frac{5}{2}$.

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.

Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. Etude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

b. Démontrer que similitude s transforme OABC en ABDE.

c. Quel est l'angle de la similitude s ?

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée s o s, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position de Ω.

4. Etude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED

a. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est : $z' = -\frac{3}{2} i \bar{z} + 2 + 3i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

b. Montrer que s' transforme OABC en BAED.

c. Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 5- On considère dans le plan P orienté, un triangle AA_1A_2 tel que $AA_2 = 2AA_1$ et qu'une mesure de $(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AA_2})$ soit comprise entre 0 et π. Les cercles (C_1) et (C_2) passant par A et de centre respectifs A_1 et A_2 se recoupent en B.

1 - On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant (C_1) en (C_2). Soit M un point de (C_1) et M' son image par S_A.

a) Justifier la relation : $(\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1M}) = (\overrightarrow{A_2A}, \overrightarrow{A_2M})\ (2\pi)$.

b) Démontrer que les points M, B et M' sont alignés

2 - On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A qui transforme (C_1) en (C_2).

a) Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A a pour axe la médiatrice du segment $[A_1K]$ où K est le milieu du segment $[AA_2]$.

b) Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A$. Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement.

En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M du plan sont symétriques par rapport à la droite (AA_2)

Exercice 6 - On considère dans le plan P orienté, un triangle ABC équilatéral de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symétrique de A par rapport à C.

1 - Soit f l'antidéplacement de P tel que f(C) = A et f(A) = B. Montrer que f est une symétrie glissée dont on précisera l'axe et le vecteur

2 - Soit g la similitude directe telle que g(B) = D et g(I) = C. Montrer que g(A) = A et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3 - Soit Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$.

a) Justifier que f o g est une similitude indirecte.

b) Déterminer f o g(I) et f o g(A).

c) Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire f o g(Ω)= Ω

4 – a) Déterminer le rapport de la similitude f o g.

b- Montrer que l'axe de la similitude f o g est perpendiculaire en Ω à la droite (AB)

Exercice 7 - Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soient

les points I, D, E définis par : I milieu de [AD], C milieu de [DE] et H = B * I ; I = B * C

1 – a) Soit S la similitude directe qui transforme B en D et I en E. Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Soit $h = S \circ R_{(A,\frac{\pi}{3})}$, déterminer h(I). En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) Déterminer alors le centre de S.

2 – a) Soit $\sigma = S \circ S_{(AB)}$, Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

b) Soit (Δ) l'axe de σ. Montrer que (Δ) est la médiatrice de [BJ].

c) Soit K projeté orthogonal de D sur (Δ). Monter que σ (H)= K.

3- a) Soit $f = \sigma \circ h_{(H,\frac{1}{2})}$

b- Montrer que $h_{(A,2)} \circ h_{(H,\frac{1}{2})}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

YOUSSEF BOULILA

Exercice 8 - Dans le plan orienté on considère ABC rectangle en C, de sens direct et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ et soit O le milieu de [AB]. La hauteur issue de C coupe (AB) en H et la parallèle à (BC) menée par A en B.

1- Montrer que H est le milieu de [OA] et que $\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HA} = \vec{0}$.

2- Soit S la similitude direct transformant C en A et B en C.

a) Détermine son rapport et calculer son angle.

b) Quelle est l'image de A par S.

3- Soit Ω le centre de S. On pose h = S o S. Déterminer la nature de h et montrer que $\overrightarrow{\Omega B} + 3\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$.

Justifier que Ω = H.

4- Soient les points I, J et K les milieux respectifs des segments BC, CA et AD.

a) Déterminer S(I) et S(J).

b) Montrer que les points I, H et K sont alignés.

c) Démontrer que le triangle IJK est un triangle rectangle en J et que (JH) est une hauteur du triangle IJK

5- On pose $f = h \circ S_{(IK)}$. Montrer que $f \circ S_{(JH)}$ est une homothétie que l'on caractérisera.
Déduire que f est une similitude indirecte dont on précisera le centre, le rapport et l'axe.

Exercice 9 - A et C sont deux points distincts du plan orienté.

- On note (C) le cercle de diamètre [AC], O le centre de (C),

- B est un point de (C) distinct de A et C.

- Le point D est construit tel que BCD soit équilatéral de sens direct de centre de gravite G,

- I le milieu de [BD] et J le milieu de [BC].

- Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M

1°) Montrer que G est le milieu du segment [CM].

2°) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme M en B et D en M. Montrer que f est une

rotation de centre G ; Déterminer une mesure de son angle.

3°) Soit S la similitude directe qui transforme I en D et J en G.

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

b) Montrer que S(B)=M et que S(C)=C.

4°) a) On pose S(A)=A'. Placer A' sur la figure.

b) Soit O'=S(O). Montrer que O' est le milieu de [CA'].

5°) Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque le point B décrit le cercle (C).

6°) Soit σ la similitude indirecte de centre C tel que σ (J)=D

a) Déterminer le rapport de σ et montrer que son axe est la médiatrice de [BD].

b) Montrer que σ (G)=M et déterminer l'ensemble des points G.

Exercice 10 - Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct, A' le point de [AC] tel que CAA' soit un triangle isocèle de sommet C. La bissectrice intérieure de [CA,CB] coupe [AB] en E et la parallèle à (AB) passant par A' en I et soit F = $S_{(AC)}$ (I).

1°/ Soit r la rotation de centre C qui transforme A en A''.

a- Déterminer une mesure de l'angle de r.

b- Déterminer r (F).

c- Montrer que $\frac{CA'}{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire que A' est l'image de B par l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d- Montrer que h (E) = I.

2°/ Soit S la similitude directe de centre C qui transforme B en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Montrer que S(E)=F et en déduire que le triangle CEF est un triangle rectangle isocèle en F.

3°/ Soit $\sigma = S_{(CF)} \circ S$.

a) Montrer que σ est une similitude indirecte, préciser son centre et son rapport.

c) Montrer que l'axe (Δ) de est la médiatrice de[FI].

Exercice 11 - Soit un triangle équilatéral ABC, de sens direct. On désigne par I, J, K les milieux respectifs des segments [BC] ; [CA] et [AB] et par D =S_J(K).

1°/ Soit S similitude directe qui transforme D en A et J en B.

a) Déterminer la rapport et l'angle de S.

b) Montrer que C est le centre de S.

2°/ Soit g la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.

a) Déterminer le rapport de g

b) Soit Ω le centre de g, Déterminer g o g (D), En déduire que g o g est une homothétie que l'on caractérisera.

c) La droite (DB) coupe (IK) en E et (AC) en F et soit $H=S_D$ (F). Montrer que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EB}$.

En déduire que $\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DF}$ et que $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD}$.

d) Prouver alors que Ω = H.

e) Montrer que l'axe (Δ) de g est la médiatrice de [CF].

3°/ Soit f = go S^{-1}.

a) Déterminer f(A) et f(C).

b) En déduire que f est une symétrie glissée que l'on caractérisera.

Exercice 12 - Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct. D = S_B (A) ; O et J les milieux respectifs des segments CD et CB et soit (C) le cercle de diamètre CD.

Soit S la similitude directe tel que S(D)=B et S(B)=C.

1°/ Déterminer le rapport et l'angle de S

2°/ Soit I le centre de S

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de SoS

b) déduire que $I \in C$ et IB = BC

c) montrer que (OB) = med [IC]

d) préciser la nature de CADI. Placer I sur la figure.

3°/ a) Prouver qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme C en B et B en I.

b) caractériser f

4°/ Soit $g = S \circ f$.

a) déterminer $g(C)$ et $g(B)$.

b) prouver que g est une similitude indirecte. Préciser son centre et son rapport.

c) Soit K le point de [CI] tel que CB=CK. Montrer que $CK = \frac{\sqrt{2}}{2} CI$ puis que l'axe (Δ) de g est la médiatrice de [BK].

YOUSSEF BOULILA