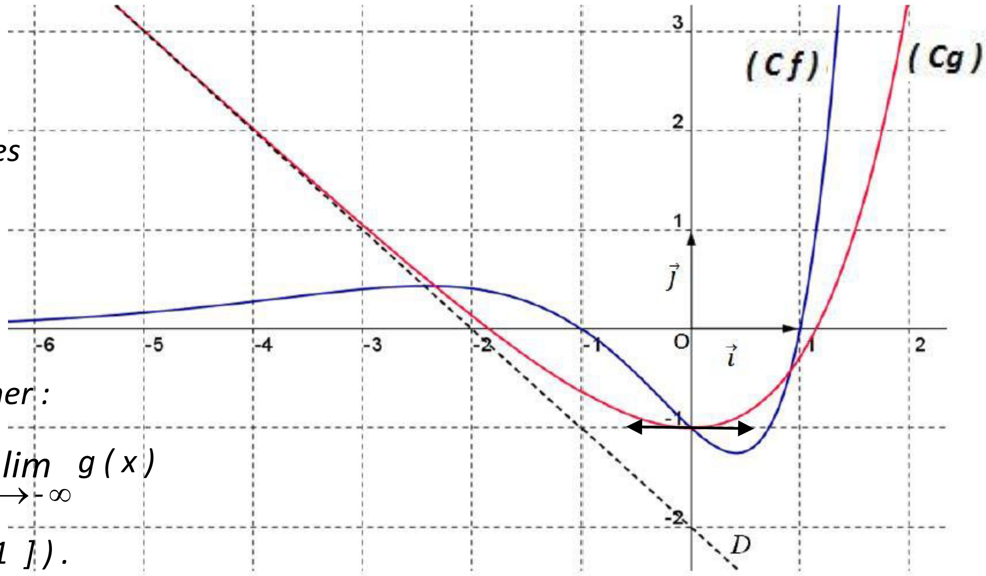
Lycée Houmet Souk	Devoir de Contrôle N : 1	4 Technique 3
Prof : Loukil Mohamed	Durée : 2 Heures	07 - 11 - 2017

EXERCICE N : 1 (3 points)

On a représenté ci-contre les courbes représentatives **(C f)** et **(Cg)** de deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR .



A) Par lecture graphique , déterminer :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\, g(x) + x \,]$ et $g(\,]-\infty\,;\,1\,]\,)$.

2) Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation : $f(x) = g(x)$. Justifier

B) Soit la fonction h définie par : $h(x) = g \circ f(x)$.

1) Donner $\mathbf{D}_{h'}$ le domaine de dérivabilité de h . Justifier

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$; $h(-1)$ et $h'(-1)$.

EXERCICE N : 2 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + x\cos(\pi x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

On désigne par **(C f)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $x^2 + x + 1 \leq f(x) \leq x^2 - x + 1$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

3) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.

B) 1) a) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{-4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$.

b) Déterminer $f([0, +\infty[)$. Justifier

2) Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α .

3) a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Déduire alors que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

EXERCICE N : 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$, on donne $\theta \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} [$.

On considère les points M et N d'affixes respectives : $Z_M = i + e^{i\theta}$ et $Z_N = e^{i\theta}$.

1) *Déterminer et construire l'ensemble* **(Γ)** *des points M lorsque θ varie dans $[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} [$.*

2) *Déterminer la valeur de θ pour laquelle O , M et N sont alignés .*

3) *Vérifier que la forme exponentielle de Z_M est : $Z_M = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$.*

4) Pour toute la suite : $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) *Ecrire Z_M sous forme cartésienne puis montrer que $| Z_M |^2 = 2 + \sqrt{3}$.*

b) *Ecrire Z_M sous forme exponentielle puis déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.*

EXERCICE N : 4 (5 points)

A) *Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$.*

On considère les points A et B et C d'affixes respectives $Z_A = -2$ $Z_B = -1 + i$ et $Z_C = i$.

Soit $f : P \setminus \{ A \} \rightarrow P$; $M_{(Z)} \mapsto M'_{(Z')}$ avec : $Z' = \frac{iZ + i + 1}{Z + 2}$.

1) a) *Vérifier que : $Z' = \frac{i (Z + 1 - i)}{Z + 2}$.*

b) *Déterminer la nature de l'ensemble (Δ) des points M tels que $|Z'| = 1$.*

c) *Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points M tels que Z' est un réel .*

2) a) *Vérifier que pour tout $Z \neq -2$ on a : $Z' - i = \frac{1 - i}{Z + 2}$.*

b) *En déduire que pour tout $M \neq A$, on a : $CM' . AM = \sqrt{2}$ et $(\widehat{\vec{u} , \overrightarrow{CM'}}) + (\widehat{\vec{u} , \overrightarrow{AM}}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$.*

c) *Prouver alors que si M appartient au cercle* ***(C)*** *de centre A et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle* ***(C ')*** *dont on précisera le centre et le rayon .*

3) *Soit E le point d'affixe $Z_E = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$*

a) *Vérifier que : $Z_E - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.*

b) *En utilisant la questions* **2)** *, construire le point $E' = f (E)$.*