

Fonction logarithme népérien



I – Définition et premières propriétés

Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. On note cette fonction « ln » ou « Log »

$$\text{Ainsi on a : } \forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Premières propriétés

- Il résulte de la définition que la fonction ln est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- Il existe et unique $x \in]2; 3[$ tel que $\ln x = 1$

Soient a et b deux réels strictement positifs on a :

- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
- $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$
- $\ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

II- Etude et représentation graphique de la fonction ln

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n - 1$

$$\text{Alors on a : Si } 2^k \leq t \leq 2^{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^{k+1}} \Rightarrow \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \frac{2^{k+1} - 2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{2^n} \frac{dt}{t} \geq \frac{n}{2} \Rightarrow \ln(2^n) \geq \frac{n}{2}$$

Soit $A > 0$ et $n_0 = E(A) + 1$

Pour tout $x > 2^{2n_0}$; $\ln x > \ln(2^{2n_0}) > \frac{2n_0}{2} = n_0$ et puisque $n_0 > A$ alors $\forall x > 2^{2n_0}, \ln x > A$

Donc la fonction ln est non majorée

Ainsi la fonction ln est croissante et non majorée alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- Soient $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $x > 0$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x}$

La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$ alors la fonction

$$g = -(f \circ u) \text{ est dérivable sur }]0; +\infty[\text{ et } \forall x > 0, g'(x) = -u'(x) \cdot f'(u(x)) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} = f'(x)$$

Ainsi $\forall x > 0, g'(x) = f'(x) \Rightarrow \forall x > 0; g(x) = f(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$

Or $g(1) = f(1) = 0$ alors $c = 0$ donc $\forall x > 0; g(x) = f(x) \Rightarrow \forall x > 0; -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$

Par suite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty$

On en déduit que l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentative de la fonction \ln

• $\forall t \geq 1; t \geq \sqrt{t} \Rightarrow \forall t \geq 1; \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\forall x \geq 1; \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} \Rightarrow \ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$

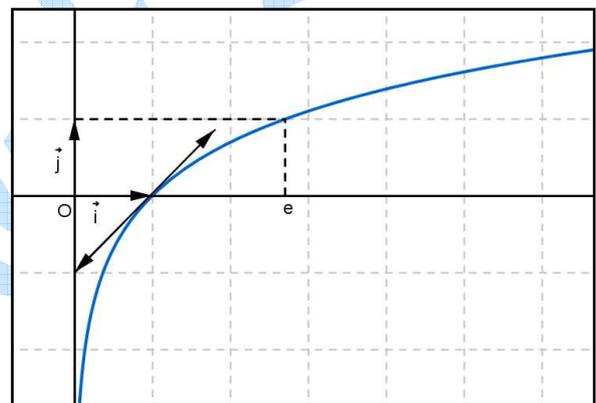
Ainsi $\begin{cases} 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \forall x \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \end{cases}$ Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction \ln admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

• Tableau de variations de la fonction \ln

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
\ln	$-\infty$	$+\infty$

• Courbe représentative de la fonction \ln



La fonction \ln réalise une bijection strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R}

L'unique réel x tel que $\ln x = 1$ est notée e , ainsi $\ln e = 1$, $e \approx 2,71828$

Compléments

- La fonction \ln est dérivable en 1 est $\ln'(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\forall x > 0$ on pose $t = \frac{1}{x}$, lorsque $x \rightarrow 0^+, t \rightarrow +\infty$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\ln t}{t} = 0$$

Théorème

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

III- Propriétés algébriques

On considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \ln(ax)$ où $a > 0$

- g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x} = f'(x)$
- $\forall x > 0, g'(x) = f'(x) \Rightarrow \forall x > 0, g(x) = f(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$ donc $\forall x > 0, \ln(ax) = \ln x + c$
en particulier $\ln a = \ln 1 + c \Rightarrow c = \ln a$ donc $\forall x > 0, a > 0 \ln(ax) = \ln x + \ln a$
- Pour tous réels strictement positifs a et b , $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Théorème

Pour tout réels strictement positifs a et b

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

Soit a un réel strictement positif

- Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

Pour $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln a$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\ln(a^n) = n \ln(a)$ et montrons que $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln(a)$

On a par hypothèse de récurrence : $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Donc $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \cdot a) = n \ln(a) + \ln a = (n+1) \ln a$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

- Soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$ alors $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n) \ln a = n \ln a$ (car $-n \in \mathbb{N}$)

En fin $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$

- Soit n entier tel que $n \geq 2$ alors $a = (\sqrt[n]{a})^n \Rightarrow \ln a = \ln\left((\sqrt[n]{a})^n\right) = n \ln(\sqrt[n]{a}) \Rightarrow \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$

Théorème

Soit a un réel strictement positif

- $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln a$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2, \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln a$

IV- Autres limites

Soient p un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2

$$\bullet \forall x > 0, \frac{(\ln x)^n}{x^p} = \frac{\left(\frac{1}{p} \ln(x^p)\right)^n}{\left(\sqrt[p]{x^p}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{p} \ln\left(\sqrt[p]{x^p}\right)^n\right)^n}{\left(\sqrt[p]{x^p}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n}{p} \ln(\sqrt[p]{x^p})\right)^n}{\left(\sqrt[p]{x^p}\right)^n} = \left(\frac{\frac{n}{p} \ln(\sqrt[p]{x^p})}{\sqrt[p]{x^p}}\right)^n$$

Posons $t = \sqrt[p]{x^p}$, lorsque $x \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{n}{p} \ln(\sqrt[p]{x^p})}{\sqrt[p]{x^p}}\right)^n = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{p} \cdot \frac{\ln t}{t}\right)^n = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} |x^p (\ln x)^n| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{t^p} \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^n \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| (-1)^n \frac{(\ln t)^n}{t^p} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \frac{(\ln t)^n}{t^p} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln x)^n = 0$$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et p : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^p} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p (\ln x)^n = 0$

V- Fonctions $x \mapsto \ln(u(x))$, $x \mapsto \ln|u(x)|$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Démonstration

On a : $f = g \circ u$, où $g : x \mapsto \ln x$

u est dérivable sur I et $u(I) \subset]0; +\infty[$
 g est dérivable sur $]0; +\infty[$ } alors $g \circ u$ est dérivable sur I

Ce qui implique f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \cdot g'(u(x)) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Démonstration

On a : $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors u garde un signe constant sur I

• Si $\forall x \in I, u(x) > 0$ alors d'après le théorème précédent f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

• Si $\forall x \in I, u(x) < 0$ alors $\forall x \in I, f(x) = \ln(-u(x))$ et comme u est dérivable sur I alors la fonction $-u$ est dérivable sur I $\forall x \in I, -u(x) > 0$ donc f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = -u'(x) \cdot \frac{1}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ alors la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $F : x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où $k \in \mathbb{R}$

On se propose de chercher une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \ln x$

La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_e^x f(t)dt$ est la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e

$\forall t > 0$, on pose $g'(t) = 1 \rightarrow g(t) = t$ et $f(t) = \ln t \rightarrow f'(t) = \frac{1}{t}$ Alors d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\forall x > 0, F(x) = [g(t).f(t)]_e^x - \int_e^x g(t)f'(t)dt = [t \ln t]_e^x - \int_e^x t \cdot \frac{1}{t} dt = x \ln x - e - \int_e^x dt = x \ln x - x$$

Théorème

La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$

Prof: Elakli Zahi