Exercice

*Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide **(S)** de masse **m**, fixé à un ressort à spires non jointives, de raideur **k** et de masse négligeable. Le solide **(S)** se déplace, sans frottement, sur un guide horizontal **(T)**. La position du centre d'inertie **G** de **(S)** est repérée par son abscisse **x(t)** sur un axe horizontal **(x'Ox)** dans le repère $(O,\vec{i})$. L'origine des abscisses est confondue avec **G** lorsque le solide **(S)** est en équilibre (figure 1).*

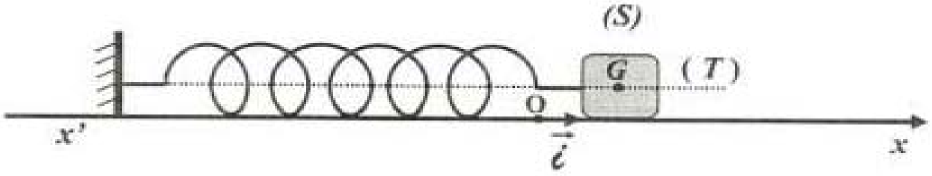


Figure 1

A- *Le solide (S), à un instant $t = 0s$, est écarté de **2 cm** de sa position d'équilibre puis lancé avec une vitesse initiale V_0. Les variations de $x(t)$ sont données par la figure 2.*

1-a- *Etablir l'équation différentielle en $x(t)$ régissant le mouvement de (S).*

b- *Vérifier que : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ est une solution de cette équation différentielle, en précisant l'expression de ω_0.*

2- *Par exploitation de la courbe de la figure 2:*

a- *déterminer l'amplitude X_m, la pulsation ω_0 et la phase initiale φ_x.*

b- *déduire la valeur de la raideur **k** du ressort. On prendra $m = 160$ g.*

c- *déterminer le sens et la valeur de la vitesse de (S) à l'instant $t = 0$ s.*

3-a- *Montrer que l'énergie mécanique **E**, du système {ressort, solide S} est constante et calculer sa valeur.*

b- *Déduire la valeur de l'énergie cinétique E_c du solide (S) à l'instant $t = 0{,}7$ s.*

B- *le solide **(S)** est maintenant soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi N t)\vec{i}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** est une constante positive. Les variations de l'élongation **x(t)** et de la force excitatrice **F(t)** sont données par les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de la figure **3** de la page **5/5**.*

1- *Identifier, en le justifiant, la courbe qui correspond à la variation de **x(t)**.*

2- *Déterminer graphiquement :*

a- *les valeurs des amplitudes X_m et F_m,*

b- *la phase initiale φ_x de l'élongation et la fréquence **N** de la force excitatrice.*

3-a- *Etablir l'équation différentielle en **x(t)** qui régit les oscillations de (S).*

b- *Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle en **x(t)**.*

c- *En déduire, par exploitation de cette construction, la valeur de la constante **h**.*

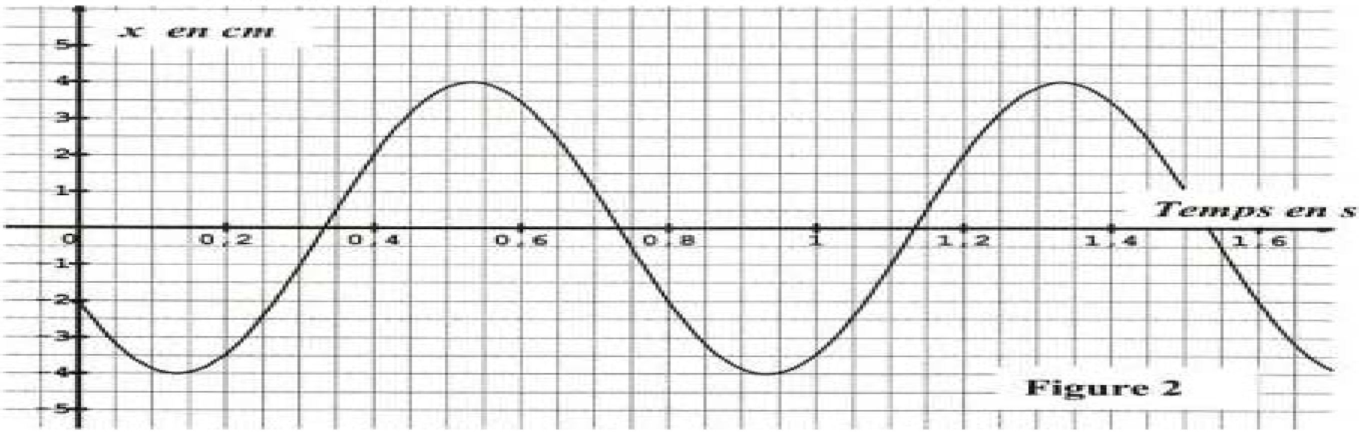


Figure 2

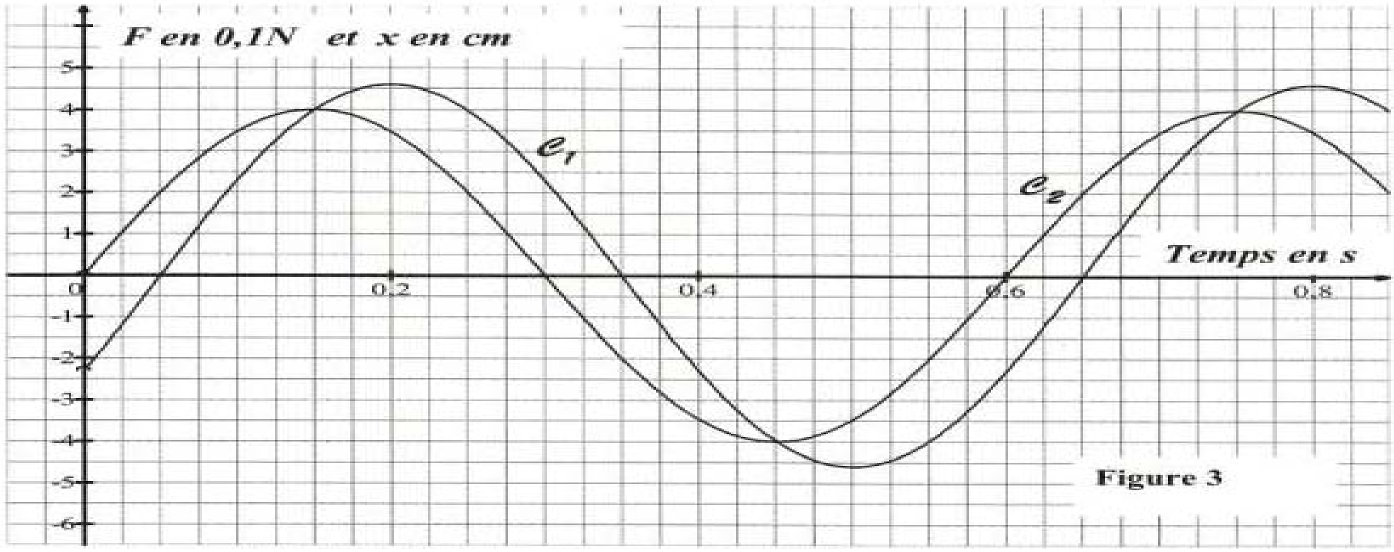


Figure 3

Exercice

Un solide (S) de masse **m** est fixé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur **k = 25 N.m^{-1}** et dont l'autre extrémité est fixe. Le solide (S) est assujetti à se déplacer suivant l'axe du ressort (R) maintenu fixe et horizontal, tout en étant soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où **h** est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{V}$ est la vitesse instantanée du solide (S). on donne **h = 1,4 N.s.m^{-1}**.

On applique au solide (S) une force excitatrice $\vec{F} = (1{,}1.\sin 2\pi Nt).\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe du ressort (R) et **N** est la fréquence réglable de l'excitateur. Le solide (S) se met à osciller suivant $(O, \vec{i})$, de part et d'autre de la position d'équilibre O de son centre d'inertie G.

On désigne par **x(t)** l'élongation de G en fonction du temps par rapport au repère $(O, \vec{i})$.

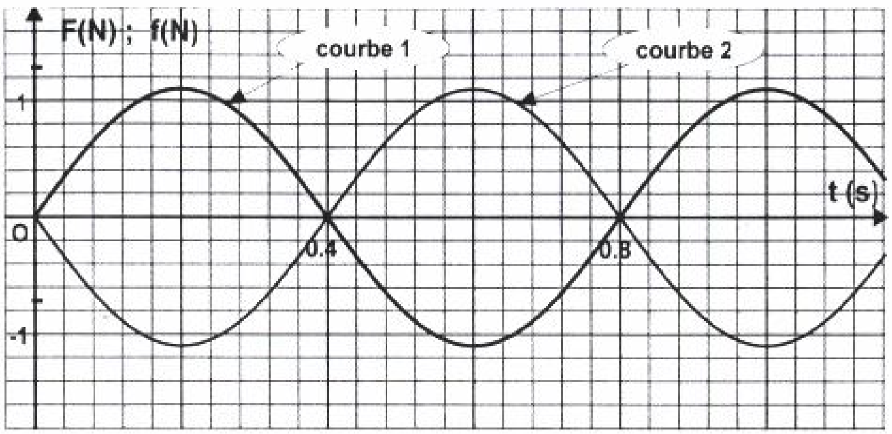
1. a) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du solide (S) sont régies par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}.\frac{dx}{dt} + \omega_o^2.x = \frac{F}{m}, \text{ où } \tau = \frac{m}{h} \text{ et } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

b) Cette équation différentielle admet comme solution $x(t) = X_m\sin(2\pi Nt + \varphi_x)$.

De quel régime d'oscillations s'agit-il ?Justifier la réponse.

2. La fréquence **N** de l'excitateur étant fixée à une valeur particulière N_1, on trace avec un dispositif approprié, les chronogrammes de la figure ci-contre ; l'un représente l'évolution de F et l'autre représente celle de **f** au cours du temps.



a) Déterminer parmi les courbes (1) et (2) celle qui représente **F(t)**.

b) A l'aide des deux courbes (1) et (2), déterminer :

- la valeur N_1 de la fréquence de l'excitateur,
- la valeur de l'amplitude f_m de la force de frottement $\vec{f}$,

En déduire la valeur de X_m et celle de φ_x.

c) Montrer qu'à tout instant t, x(t) vérifie la relation : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2.x = 0$

En déduire que l'oscillateur {(S), (R)} est en résonance de vitesse.
Montrer que son énergie totale E est constante.

d) Déterminer la valeur de la masse **m** du solide (S).

Exercice

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort **(R)**, à spires non jointives, de masse supposée négligeable et de raideur **$k = 25\ N.m^{-1}$**, lié à un solide **(S)** supposé ponctuel de masse **m** qui peut se déplacer sur un plan horizontal. A l'équilibre, le centre d'inertie **G** du solide coïncide avec l'origine **O** d'un repère $(O, \vec{i})$. La position du solide à un instant **t** donné est repérée par son abscisse **x(t)** dans ce repère (**figure 2**). Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h.\vec{v}$; où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de **G**. Un dispositif approprié (moteur) permet d'exercer sur **(S)** une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m.\sin(2\pi Nt).\vec{i}$, d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable, de façon que $x(t) = X_m.\sin(2\pi Nt + \varphi_x)$; où X_m est l'amplitude et φ_x est la phase initiale de **x(t)**.

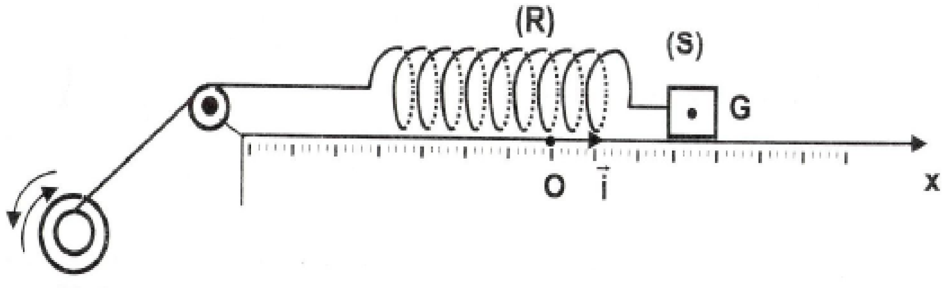


Figure 2

1) Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes **(a)** et **(b)**, données par **la figure 3**, dont l'une représente l'évolution de l'élongation **x(t)** et l'autre celle de **F(t)**.

a- Justifier que la courbe **(a)** correspond à **x(t)**.

b- Déterminer les valeurs de X_m, F_m et **N**.

c- Déterminer le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$; où φ_F est la phase initiale de $\vec{F}(t)$.

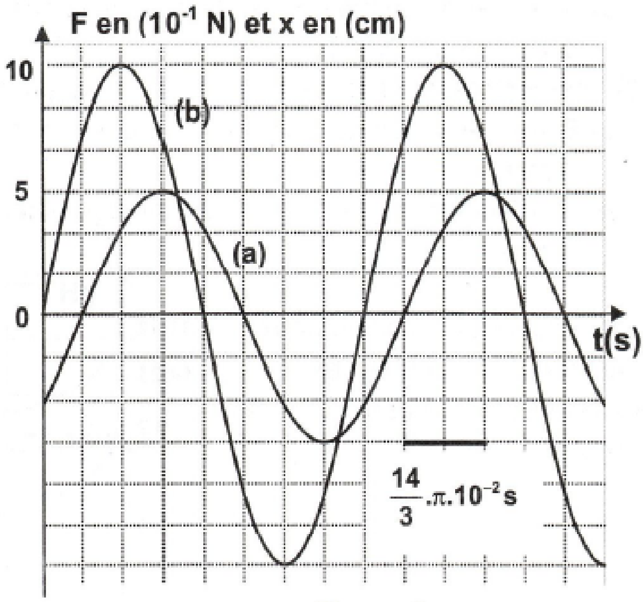


Figure 3

2) Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie **G** du solide **(S)**, en fonction de **x** et de ses dérivés première et seconde.

3) a- Faire la construction de Fresnel associée à l'équation différentielle précédente.

b- En déduire les valeurs de la constante **h** et de la masse **m**.

c- Montrer que $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{(2\pi Nh)^2 + (k - 4\pi^2N^2m)^2}}$

4) Pour une valeur N_1 de la fréquence **N**, le déphasage est : $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$ rad.

a- En se référant à une analogie formelle électrique-mécanique, montrer que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.

b- En déduire la valeur de N_1.

5) La masse **m** ne peut rester solidaire du ressort que pour une valeur de la tension du ressort ne dépassant pas **1,5** N. On fait diminuer la valeur de **h** jusqu'à atteindre la valeur $h_2 = 0,8\ N.m^{-1}.s$. La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence $N_2 = 2,35$ Hz.

a- Déterminer la valeur de l'allongement maximal X_{2m} du ressort pour $N = N_2$.

b- Préciser, en le justifiant, si le solide reste attaché au ressort, dans ce cas.

Exercice

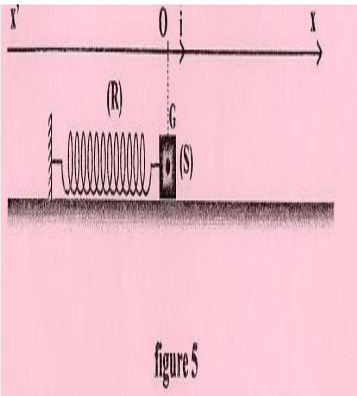
Le pendule élastique de la **figure 5 de la page 6/6 (à rendre avec la copie)** est constitué d'un ressort hélicoïdal à spires non jointives, de constante de raideur **k = 12 N.m^{-1}**, d'axe horizontal et de masse négligeable. L'une de ses extrémités est fixée à un support immobile. A l'autre extrémité est accroché un solide **(S)**, de centre d'inertie **G** et de masse **m**, pouvant osciller selon l'axe horizontal x'x. Au cours de son mouvement oscillatoire, **(S)** est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du centre d'inertie **G** de (S).

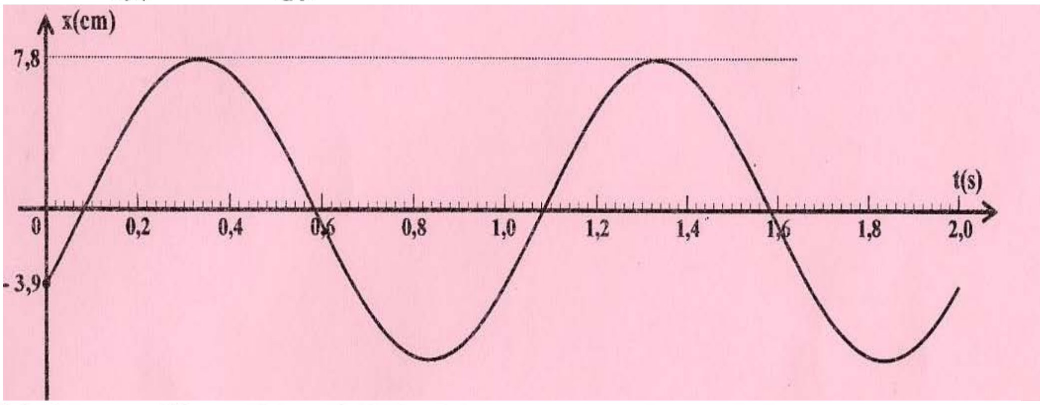
A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi Nt)\,\vec{i}$, d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable ; $\vec{i}$ étant le vecteur directeur unitaire de l'axe x'x.

La position de **G** est repérée par son abscisse **x** dans le repère $(O, \vec{i})$. L'origine **O** correspond à la position de **G** lorsque (S) est au repos.

L'élongation $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$ de **G**, est une solution de l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + h\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t) \qquad \text{(I)}$$





1- La courbe de la **figure 6 de la page 6/6**, représente l'évolution au cours du temps de l'élongation **x** de **G** lorsque la fréquence de l'excitateur est ajustée à une valeur $N = N_1$.

a- En exploitant la courbe de la **figure 6**, déterminer les valeurs de la fréquence N_1, de l'amplitude X_{m_1} et de la phase initiale φ_{x_1} de l'élongation **x(t)**.

b- Sur la **figure 7 de la page 6/6**, est représenté le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA}$ associé à la fonction $Y(t) = \left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k\,x(t)\right)$ pour la fréquence $N = N_1$. Compléter la construction de Fresnel relative à l'équation **(I)** en représentant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OB}$, associés respectivement, à $h\frac{dx(t)}{dt}$ et à **F(t)**.

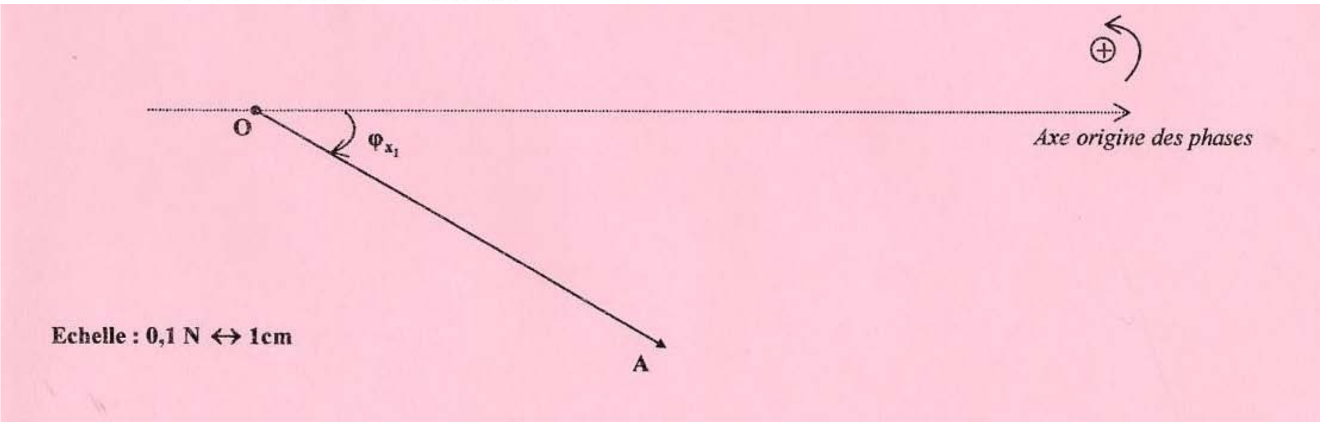
c- En exploitant la construction de Fresnel, déterminer les valeurs de F_m, **h** et **m**.

2- Dans ce qui suit, on prendra: **m = 0,08 kg**.

Pour une valeur particulière N_2 de la fréquence N de la force excitatrice, la fonction **Y(t)** s'annule.

a- Montrer que N_2 correspond à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur. Calculer sa valeur.

b- Déterminer en fonction de N_2, **h** et F_m, l'expression de l'amplitude X_{m_2} des oscillations de **G** à la fréquence N_2. Calculer sa valeur.



Exercice

Le pendule élastique de **la figure 2** est constitué d'un solide **(S)** de masse **m = 198 g** et de centre d'inertie **G**, attaché à l'une des extrémités d'un ressort **(R)** à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur **k = 20 N.m^{-1}**. L'autre extrémité du ressort est fixée à un support immobile.

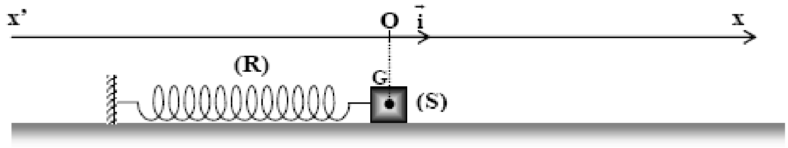


figure 2

A l'équilibre, le centre d'inertie **G** de (S) coïncide avec l'origine **O** du repère $(O\ ,\ \vec{i})$ de l'axe **x'x**.

On désigne par **x(t)** l'abscisse de **G** à un instant de date **t**, dans le repère $(O\ ,\ \vec{i})$ et par **v(t)** la valeur de sa vitesse à cet instant.

On utilise ce pendule, pour réaliser les deux expériences suivantes:

Expérience 1: On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance **a**, puis on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant de date **t = 0**. Le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point **O**. A un instant de date **t**, le système {(S) + (R)} est représenté sur la **figure 3 de l'annexe (page 5/5)**. Les frottements sont supposées négligeables.

1- **a-** Représenter sur la **figure 3 de l'annexe**, les forces extérieures exercées sur (S).

b- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'équation différentielle du mouvement de **G** peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\, x(t) = 0$; où β est une constante que l'on exprimera en fonction de **k** et **m**.

c- Sachant que l'équation différentielle précédente admet une solution de la forme $x(t) = a\sin(2\pi N_0 t + \varphi_x)$, montrer que la fréquence propre N_0 des oscillations de **G** s'exprime par : $N_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Calculer sa valeur.

2- **a-** Donner l'expression de l'énergie mécanique **E** du système {(S) + (R)} en fonction de **m**, **k**, **x** et **v**.

b- Montrer que le système {(S) + (R)} est conservatif.

c- Sachant que **E = 0,025 J**, déterminer la valeur de **a**.

3- En exploitant les conditions initiales, déterminer la valeur de la phase initiale φ_x de **x(t)**.

Expérience 2: A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur **(S)** une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi N t)\,\vec{i}$ d'amplitude **F$_m$** constante et de fréquence N réglable. Au cours de son mouvement, le solide **(S)** est soumis à une force de frottement $\vec{f}$ de type visqueux portée par l'axe **x'x**, opposée au mouvement de **(S)** et telle que $\vec{f} = -h\vec{v}$; où **h** est une constante positive.

La loi horaire du mouvement du centre d'inertie **G** de (S) est de la forme : $x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi)$

avec $X_m = \dfrac{F_m}{\sqrt{4\pi^2 h^2 N^2 + \left(k - 4m\pi^2 N^2\right)^2}}$.

1- Les oscillations effectuées par **G** sont-elles libres ou forcées ? Justifier.

2- Pour une valeur N_1 de la fréquence de la force excitatrice, l'amplitude **X$_m$** des oscillations de **G** passe par un maximum.

a- Donner le nom du phénomène dont l'oscillateur est le siège à la fréquence N_1.

b- Montrer que N_1 est donnée par : $N_1 = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$.

3- Une étude expérimentale a permis de tracer les courbes **(c$_1$)** et **(c$_2$)** de la **figure 4 de l'annexe (page 5/5)**. Elles traduisent les variations de **X$_m$** et de **V$_m$** en fonction de N ; **V$_m$** étant l'amplitude de la vitesse instantanée **v(t)**.

a- Justifier que la courbe **(c$_1$)** correspond aux variations de **X$_m$** en fonction de N.

b- En exploitant les courbes de la **figure 4**, déterminer la valeur du coefficient de frottement **h** ainsi que celle de l'amplitude **F$_m$**.

c- Déterminer pour **N = 1,6 Hz**, la valeur de la phase initiale φ de l'élongation **x(t)**.

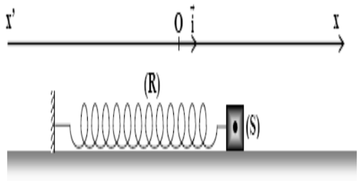


figure 3

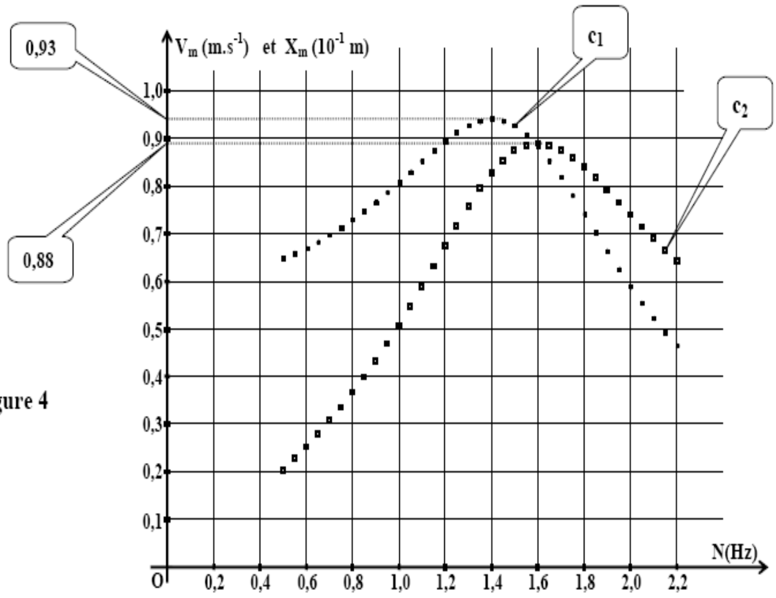


figure 4

Exercice

Un pendule élastique est constitué d'un ressort à spires non jointives, d'axe horizontal, de masse négligeable et de raideur **k = 20 N.m^{-1}**. L'une de ses extrémités est fixée à un support immobile. A l'autre extrémité, est accroché un solide (**S**) de masse **m** pouvant osciller librement selon l'axe horizontal.

L'origine **O** des abscisses est confondue avec la position de **G** lorsque (**S**) est au repos (**Figure 9**).

La position du centre d'inertie **G** de (**S**) est repérée par son abscisse **x** relativement au repère (**O**, $\vec{i}$).

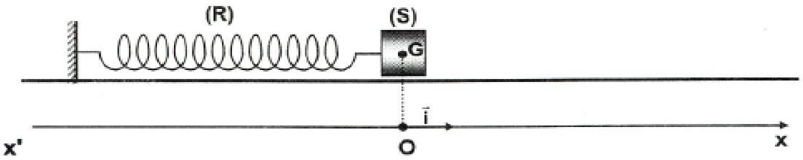


Figure 9

I - Les forces de frottement ainsi que l'amortissement du mouvement sont considérés comme négligeables.

On écarte (**S**) de sa position de repos en le déplaçant, suivant l'axe **x'x**, de manière à ce que le ressort s'allonge d'une distance **a = 3 cm**. A un instant de date **t = 0**, on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. La durée de **10** oscillations est : **Δt = 6,896 s**.

1) **a-** Vérifier que la valeur de la fréquence propre des oscillations est **N_0 = 1,45 Hz.**

b- En déduire la valeur de la masse **m** du solide (**S**).

2) On désigne par **E** l'énergie mécanique du système oscillant {solide, ressort}.

a- Donner l'expression de **E** en fonction de **x**, **k**, **m** et de la vitesse instantanée **v** du centre d'inertie **G**.

b- Calculer **E** à l'instant **t = 0**.

c- Le système étant conservatif, déterminer, en le justifiant, la valeur de la vitesse de **G** lors de son premier passage par le point **O**.

II- Le solide (**S**) est maintenant soumis, au cours des oscillations, à une force de frottement de type visqueux, $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée de **G** et **h = 0,73 N.m^{-1}.s** .

A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur (S) une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(2\pi Nt + \varphi_F).\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence **N** réglable.

L'équation différentielle régissant les oscillations de **G** s'écrit : $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + h\dfrac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = F(t)$ **(I)**

L'élongation instantanée de **G**, $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$ est une solution de l'équation **(I).**

Pour une fréquence N_1 de la force excitatrice, on enregistre la courbe schématisée par la **figure 10**, qui traduit l'évolution de **x(t)**.

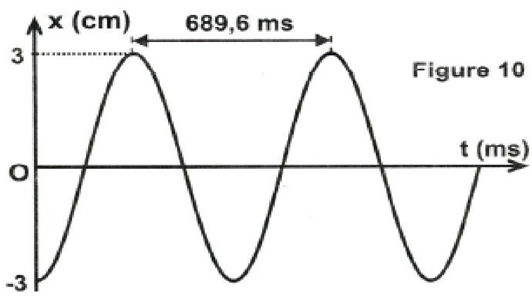


Figure 10

1) **a-** En exploitant cette courbe d'évolution, déterminer la valeur de N_1.

b- Justifier que **G** effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse.

2) Montrer que **F(t)** s'écrit : $F(t) = h\dfrac{dx(t)}{dt}$.

3) Déterminer, à partir de la courbe de la **figure10**, les valeurs de X_m et φ_x. En déduire celles de F_m et φ_F.