Exercice N°1 :(7 points)

Soit f une fonction définie sur IR \ {0} par $f(x) = \begin{cases} x^2\left(1 - cos\frac{\pi}{2x}\right) \; si \; x \in]-\infty; 1]\backslash\{0\} \\ \sqrt{4x^2+12} - (2x+1) si \; x \in]1; +\infty[\end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 1]\backslash\{0\}$ on a : $0 \leq f(x) \leq 2x^2$
   b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0
2) Montrer que f est continue en 1

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} fof(x)$

   b) Montrer que : $x^2\left(1 - cos\frac{\pi}{2x}\right) = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}X)}{(\frac{\pi}{2}X)^2}(\frac{\pi}{2})^2$ si $x = \frac{1}{X}$

   c) Déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8}$

   d) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(2 - \frac{3}{x-1})$

4) a) Montrer que : $f(x) = \frac{3}{4}$ admet au moins une solution $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$

   b) Vérifie que $\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha^2-3}{4\alpha^2}$

Exercice N°2 :(6 points)

1) Montrer que $3 - 3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$
2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A (-3+i) ; B (1+4i) ; C (- 3 i) ; D (1) et E (-2i)
   a) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$
   b) Déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A
3) Soit M un point du plan d'affixe $z \neq 2i$ et M'un point d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z+3-i}{z+2i}$
   a) Déterminer les ensembles suivants

$$\psi = \{M_z \in \mathcal{P} \; tel \; que |z'| = 1\}$$

$$\varphi = \{M_z \in \mathcal{P} \; tel \; que |z' - 1| = \sqrt{2}\}$$

   b) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe : (z' – 1)(z+2i)
   c) Déduire que : $DM' \times EM = 3\sqrt{2}$ et que : $(\vec{u}\,; \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u}\,; \overrightarrow{EM}) \equiv \frac{7\pi}{4}[2\pi]$

Exercice N°3 : (7 points)

I) a) Montrer que: $(2 - i)^2 = 3 - 4i$

b) Déduiredans ℂ les solutions de l'équation : $(E): z^2 - (1 + 2i)z - \frac{3}{2} + 2i = 0$

II) Le plan Complexe est muni d'un repère orthonormé direct $R(o, \vec{u}, \vec{v})$*. On considère les points A ; B et C d'affixes respectifs* $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ *;* $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ *et* $z_B = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

1) a) Construire les points A et C

b) Vérifier que $\frac{z_C}{z_A} = i$ *; puis déduire que OAC est rectangle en O*

c) Ecrire (1- i) sous la forme exponentielle puis déduire que $(1 - i)\, z_A = z_B$

d) Montrer que : OBAC est un parallélogramme puis Construire le point B

2) a) Ecrire z_B *sous forme algébrique*

b) Déduire les valeurs de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ *et* $\sin(-\frac{\pi}{12})$

3) Soit M un point du plan. Déterminer et construire les ensembles $\psi = \{M_z \in P \text{ tel que} : z = az_B + z_A \text{ ou } a \in IR\}$

$$\Omega = \{M_z \in P \text{ tel que} : a(z - z_B) = i(z - z_C);\ ou\ a \in IR^*\}$$