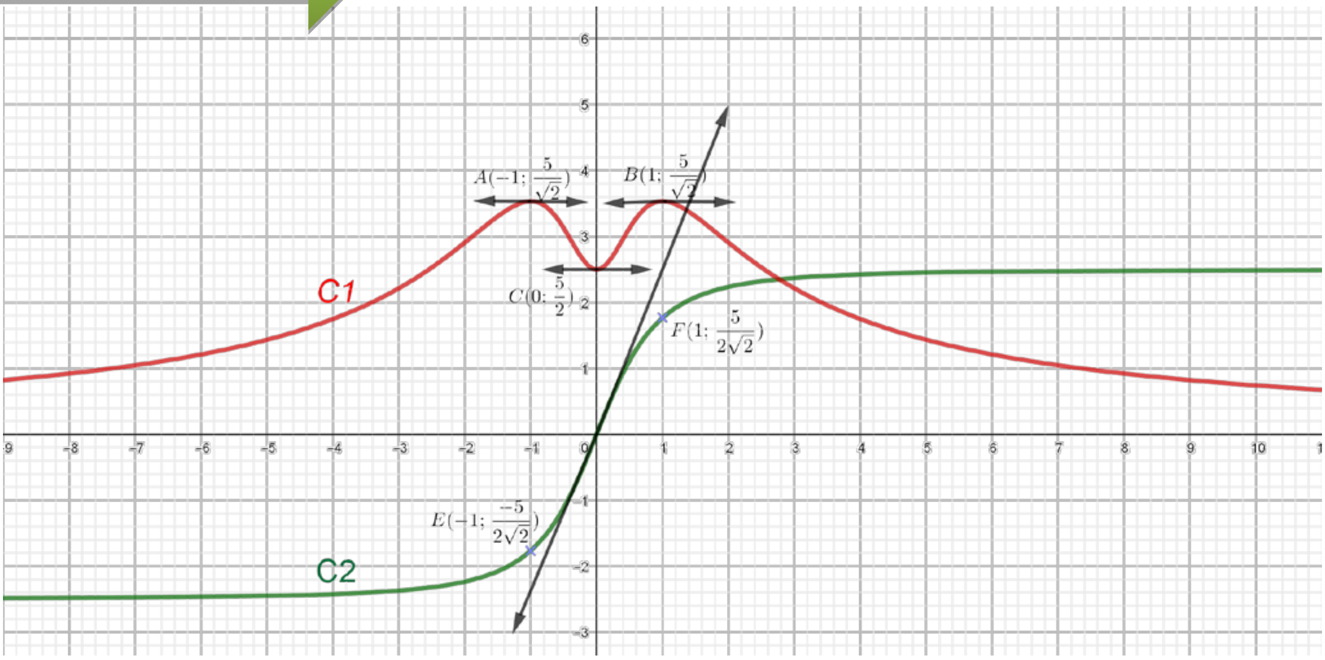
Devoir de Contrôle N °2 4^{eme} sciences exp

Prof : M KsaierLe 16/12/2017 **Durée : 2 heurs**

Exercice N°1 :(7 points)



Le graphique ci-dessous représente deux courbes C_1 et C_2 qui représentent deux fonctions f et sa fonction dérivé f ' .La courbe C_1 admet trois extrémums aux points $A(-1;\frac{5}{\sqrt{2}})$; $C(0;\frac{5}{2})$ $B(1;\frac{5}{\sqrt{2}})$.Et elle admet une asymptote horizontale d'équation $\Delta: y = 0$ aux voisinages de $\pm\infty$

1) *Montrer que C_1 représente la fonction dérivé f '*
2) *Déterminer le tableau de variation de f '*
3) *Déduire que ξ f admet 3 points d'inflexions que on déterminera ces coordonnées*
4) *a) Calculer f '(0) ; f ''(0) et f '' (-1)*

   b) Montrer que C_2 admet 4 tangents parallèles à la droite $\Delta' : y = 3x - 5$

   c) Déterminer l'équation de la tangente à C_2 au point $F(1;\frac{5}{2\sqrt{2}})$

5) *a) Montrer que pour tout réels $x \in [0;1]$ on a :*

$$\left|f(x) - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right| \leq \frac{5}{\sqrt{2}}|x - 1|$$

b) Calculer : $$\lim_{x\to\pi} \frac{f(\sin x)}{x - \pi}$$

Exercice N° 2:(7 points)

Soit f une fonction définie sur]1 ;+∞[par : $f(x) = 4 + \frac{2}{5\sqrt{x-1}}$

1) *Etudier les variations de f et montrer que f est décroissant sur]1 ; +∞ [*
2) *Montrer que pour tout $x \in [4;5]$; $f(x) \in [4;5]$*
3) *a) Montrer que $f''(x) = \frac{3}{10(x-1)^2\sqrt{x-1}}$*

b) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{45}$ pour tout $x \in [4;5]$

4)a) Montrer que $f(x) = x$ admet une solution unique α dans] 1 ; $+\infty$ [vérifier que $\alpha \in]4;5[$

b) Montrer que : $(\alpha-4)^2(\alpha-1) = \frac{4}{25}$

5) Soit (u_n) une suite réel définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 + \frac{2}{5\sqrt{u_n - 1}} \end{cases}$; $n \in IN$

a) Montrer que : $4 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in IN$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{45}|u_n - \alpha|$

c) Déduire que ; $|u_n - \alpha| \leq (\frac{\sqrt{3}}{45})^n$

d) Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice N° 3:(6 points)

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$ .Ecrire les solutions sous forme exponentielle

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation$E': z^4 - 4\sqrt{2}z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ .On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$; $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$; $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle

II) On considère l'équation $E_\theta: iz^2 + 2sin\theta z - i = 0$; avec $\theta \in]2\pi;\frac{5\pi}{2}[$

1) Montrer que $z = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).En déduire l'autre solution Z_2 de (E_θ)

2) On donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $e^{i\theta}$ et ($-e^{-i\theta}$)

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}}\right) \equiv \pi - 2\theta[2\pi]$

b) Déterminer la valeur de θ dans $]2\pi;\frac{5\pi}{2}[$ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit équilatéral