LYCÉE OUED ELLIL

❁ ❁ ❁ ❁ ❁

DEVOIR DE CONTRÔLE N° 1

MATHÉMATIQUES

CLASSES : 4^{IEME} ANNÉE SECONDAIRE

SECTION : SCIENCES EXPÉRIMENTALES

DURÉE : 2 HEURES

PROF : BELLASSOUED MOHAMED

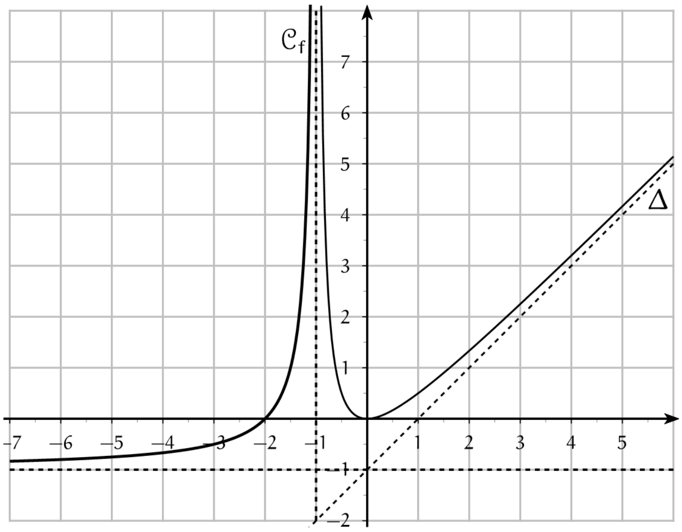
❁ ❁ ❁

ANNÉE SCOLAIRE : 2016-2017

EXERCICE 1: 5.5 POINTS

La courbe représenté ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- La droite $\Delta : y = x - 1$ et une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
- La droite $\Delta' : y = -1$ et une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$
- La droite d'équation $x = -1$ et une asymptote à $\mathcal{C}_f$



1-On utilisant le graphique déterminer :

a- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 1$ 0.75

b- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\dfrac{-x+1}{x+1}\right)$ 0.75

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f\left(x^2+1\right)}{x}$ 0.75

d- $f\left(\left]-\infty;-1\right[\right)$ et $f\left(\left]-1;+\infty\right[\right)$ 0.5

2-Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a-Déterminer le domaine de définition de la fonction g 0.25

b-Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en -1 0.5

3-a- Déterminer le domaine de définition de la fonction composée $f \circ f$ 0.5

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f \circ f(x)}{f(x)}$ 1.5

EXERCICE 2: 6 POINTS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 8x^2 + 16x - 8$

1-a-Dresser le tableau de variation de f 1

b-Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$ 0.5

2-On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : 3z^3 - 8z^2 + 16z - 8 = 0$$

Montrer que si z est une solution de (E) , alors $\overline{z}$ est aussi solution de (E) 0.5

3-Soit le nombre complexe $z_0 = 1 - \sqrt{3}i$

a-Donner l'écriture exponentielle de z_0 0.25

b-Vérifier que $z_0^3 = -8$ 0.5

4-a-Vérifier que z_0 est une solution de l'équation (E) puis résoudre cette équation 1

b-En déduire la valeur de α définie a la question 1/b 0.25

5-a-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : 3z^6 - 8z^4 + 16z^2 - 8 = 0$ 1

b-En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme $P(x) = 3x^6 - 8x^4 + 16x^2 - 8$ par trois trinômes de second degré à coefficients réels . 1

EXERCICE 3: 8.5 POINTS

BAREME

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(O;\vec{u};\vec{v})$

PREMIÈRE PARTIE

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=\sqrt{1-2x}$ et Γ sa courbe représentative

1-a- Montrer que f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ 0.5

b-Déterminer $f\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)$ et $f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\right)$ 0.5

c-Déterminer l'intervalle I tel que $f(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ 0.5

2-a-Soit la fonction $g=f\circ f$. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g. 0.5

b-Donner le sens de variation de g sur son domaine de définition . 0.5

DEUXIÈME PARTIE

Soit $\theta\in[0;\pi[$ et $M(x,y)$ est le point d'affixe $z=x+iy=\dfrac{e^{i\theta}}{1+\cos\theta}$

1-a-Montrer que pour tout $\theta\in[0;\pi[$ on a : $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ 0.5

b-En déduire que lorsque θ décrit l'intervalle $[0;\pi[$ le point M décrit la courbe Γ. 0.5

2-On considère l'application h qui a tout point M d'affixe z non nul associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z

a- Montrer que pour tout point M distinct de O on a $M'\in[OM)$ 0.75

b-Donner la forme exponentielle de z' 0.5

3-Soit $a=e^{i\theta}\cos\theta$ et A le point d'affixe a .

a-Enoncer les formules d'Euler 0.5

b-Montrer que A appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre I d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $R=\frac{1}{2}$ 1

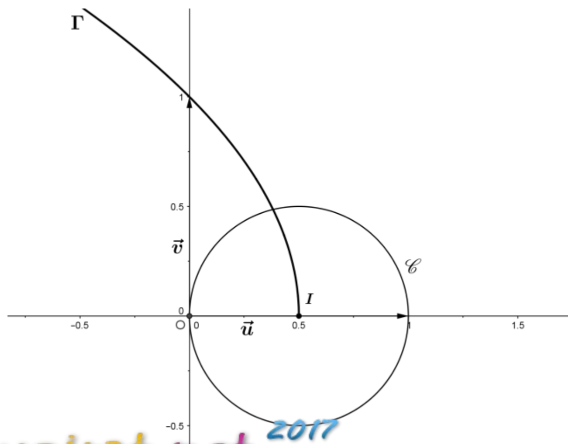
c- Montrer que les points O , A et M' sont alignés et que $AM'=1$ 0.75

4- la courbe Γ et le cercle $\mathscr{C}$ sont tracés sur la feuille annexe

a-On pose $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Donner la forme algébrique de a puis placer le point A dans le repère $\mathscr{R}$ 0.5

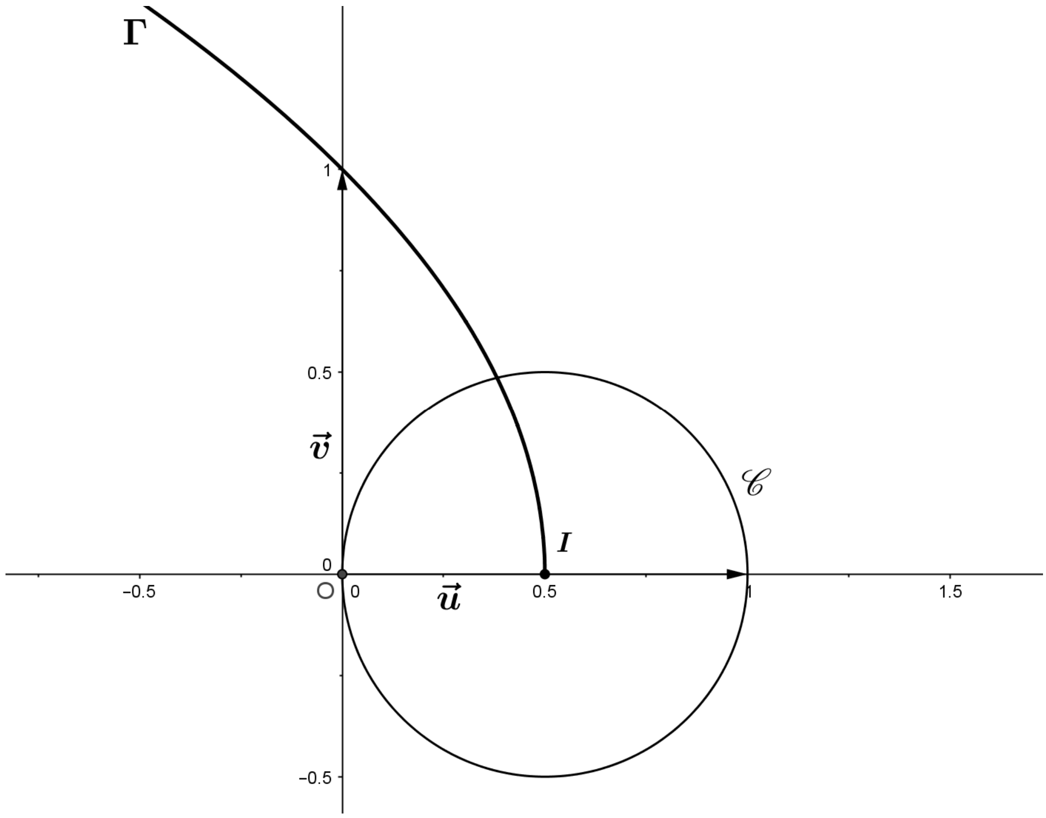
b-Expliquer comment peut-on construire les points M et M' a partir de A 0.5

c-En déduire sans calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$; que $\tan\dfrac{\pi}{8}$ est solution de l'équation $h(x)=x$ 0.5



FEUILLE ANNEXE

NOM **PRENOM** **CLASSE**



FORMULES DE DUPLICATION

$$\bullet \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\bullet \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$