Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x - 1$

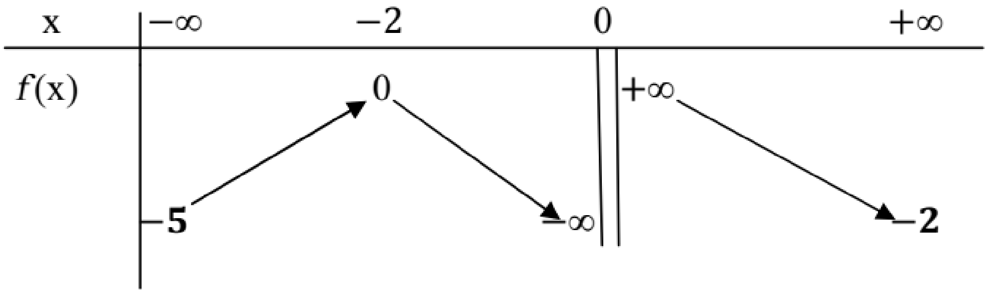
1) a) Etudier les variation de f

   b) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même

2) Montrer que l'équation (E) : $x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une seule solution α dans $[0,1]$ et que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par son tableau de variation suivant :



1) Donner les limites suivantes sans justification

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)+5}\right)$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x} - 3$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $f(1)$ et $f(2)$

2) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

3) Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in\,]1,2[$

5) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} .

Exercice 4

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. On désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Montrer que f est définie sur $I =]-\infty,-1[\cup [1,+\infty[$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1, interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que $f'(x) > 0$ si $x > 0$ et $f'(x) < 0$ si $x < 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[1, +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in [1, 2]$

3) a) Montrer que la restriction g de f sur $[1,+\infty[$ est une bijection. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

1) Calculer $\lim_{0^+} f(x)$ et $\lim_{+\infty} f(x)$

2) Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - 1$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$

b) Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

c) Calculer $f(4)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{5}{2}\right)$

5) Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes de f et de f^{-1}

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+1}$ et soit (C) sa courbe représentative

1) Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$ et préciser le nombre dérivé de f à droite en 0

3) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-1, 4]$

4) Soit g la réciproque de f

a) Donner le tableau de variation de g

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$

c) Montrer que g est dérivable sur $]-1, 4[$ on précisera la dérivabilité de g à gauche en 4

d) Expliciter $g(x)$ pour $x \in]-1, 4]$