

Les suites réelles

Les équations à coefficients complexes

Séance 2

EXERCICE 1:

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$

- 1) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 3$
- 2) En déduire que pour tout entier naturel ≥ 3 , on a : $u_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} u_3$.
- 3) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 2:

Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N}^* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

- 1) a) Calculer : u_2 , u_3 et u_4 .
 b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = 2 - 4 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2^n}$
 c) En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$
 b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
 c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 3:

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 12, v_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}; n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq v_n$
- 3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .
- 4) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3u_n + 8v_n$
 - a) Montrer que (t_n) est une suite constante.
 - b) En déduire la valeur de ℓ .

EXERCICE 4:

Soit (a_n) une suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < a_n \leq 1$
 b) Etudier la monotonie de (a_n) , puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite ℓ .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$
 - a) Calculer : u_0 et v_0
 - b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L .
 - c) Montrer que $2 - \sqrt{2} \leq L \leq 1$

EXERCICE 5:

- 1) a) Calculer $(2 + i)^2$
 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 3(2 + i)z + 2(3 + 4i) = 0$
 c) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^4 - 3(2 + i)z^2 + 2(3 + 4i) = 0$

- 2) Soit l'équation (E') : $z^3 - 2(3 + 2i)z^2 + (3 + 14i)z + 8 - 6i = 0$
- Montrer que l'équation (E') admet dans \mathbb{C} une solution imaginaire pure z_1 .
 - Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2(3 + 2i)z^2 + (3 + 14i)z + 8 - 6i$
Déterminer les complexes a , b et c tels que : $P(z) = (z - z_1)(az^2 + bz + c)$
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E').

EXERCICE 6:

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$$U_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in IN \quad V_n = \frac{2}{U_n} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

- 1) Calculer : V_0, U_1, V_1, U_2 et V_2 .

- 2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a :
$$\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ \text{et} \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$$

- 3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$. [1] (On pourra remarquer que : $U_n \cdot V_n = 2$).

- 4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$.

- 5) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.

- 6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq 1$.

En déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$. [2]

- 7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :

$$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4} (U_n - V_n).$$

En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

- 8) Montrer que les deux suites U et V sont convergentes vers la même limite ℓ qu'on calculera.

EXERCICE 7: (Bac "contrôle" 2014)

On considère, dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{2}(1-i)z - 2i = 0$.

- 1) a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

- b) Résoudre l'équation (E).

- 2) a) Donner l'écriture exponentielle de $1-i$.

- b) Vérifier que pour tout nombre complexe z :

$$2 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} z \right)^2 - \sqrt{2}(1-i) \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} z \right) - 2i = -2i(z^2 - z + 1).$$

- c) Montrer que les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

- d) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

- e) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.