Les nombres complexes (I)
Limites et continuité

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\le 0 \\ 1+x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a- Montrer que, pour tout $x>0$, $1-x\le f(x)\le 1+x$

 b- Etudier alors la continuité de f en 0

2) a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,0[$ une unique solution α

 b- Vérifier que $-0.7<\alpha<-0.6$

3) a- Montrer que la fonction h : $x\longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

 b- Montrer que la fonction f est continue sur IR.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\tan x)$

EXERCICE 2:

On considère la fonction f : $x\longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x+4}\right)$

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x)=f(x)-x$

 a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.

 b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans$]-\infty,\frac{1}{2}[$.

 Vérifier que $-0{,}7<\alpha<-0{,}6$

 c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha)=1$

3) On donne le tableau de variation d'une fonction h définie et dérivable sur $[-1,+\infty[$:

 a) Calculer goh(-1) et $\lim\limits_{x\to+\infty} goh(x)$

 b) Déterminer $goh([-1,+\infty[)$

 c) Montrer que la fonction goh est continue sur $[-1,+\infty[$

 d) Dresser le tableau de variation de la fonction goh

 e) En déduire que l'équation goh(x)= 0 admet une unique solution β dans $[-1,+\infty[$.

EXERCICE 3: (Vrai ou Faux)

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

1) Le nombre complexe $a=(\sqrt{3}+i)^{2010}$ est imaginaire pur

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit θ un réel.
L'ensemble des points M d'affixe $z=1-3i+e^{2i\theta}$ est le cercle de centre le point $J(-1+3i)$ et de rayon 1.

3) Pour tout nombre complexe z, si $|1 + iz| = |1 - iz|$ alors la partie imaginaire de z est nulle

4) Dans le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives non nulles z_A et z_B telle que $z_B = iz_A$ alors le triangle OAB est rectangle et isocèle en O

EXERCICE 4:

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

1) a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle.

   b) Montrer que $z_B = z_A.e^{i\frac{\pi}{3}}$

   c) En déduire la nature du triangle OAB.

2) Placer le point A puis le point B.

3) a) Donner la forme algébrique de z_B.

   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

4) On donne le point C d'affixe $z_C = -\sqrt{3}.\overline{z_B}$

   a) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du losange OACB.

EXERCICE 5:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{u} , \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 2e^{i\theta}$; $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et $z_C = -1 + e^{i\theta}$

1) Déterminer l'ensemble des points A quand θ varie dans $]0,\pi[$.

2) Ecrire z_B et z_C sous la forme exponentielle.

3) Montrer que OBAC est un rectangle.

4) Déterminer le réel θ de $]0,\pi[$ tel que OBAC soit un carrée.

EXERCICE 6:

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. A tout point M d'affixe $z \neq 0$, on lui associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = i + \frac{2}{z}$

1) On suppose que $z = x + iy$ tel que $(x, y) \in \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$

   a) Vérifier que $z' = \frac{2x}{x^2+y^2} + i\left(1 - \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$

   b) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est réel

2) On suppose que $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

   a) Montrer que $z' = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$

   b) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ

   c) Application : on pose $z = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer $|z'|$ .En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$