Limites et continuité

Séance 1

EXERCICE 1:

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1-2x\sin(3x)}{x^2+1}$

Montrer que pour tout réel $x<0$, on a : $\frac{2x+1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1-2x}{x^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2-\cos x}$

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x}$

EXERCICE 3:

1) Soit les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$

   a) Calculer $f \circ g\,(3)$; $g \circ f\,(-2)$

   b) Définir chacune des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

   c) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} g \circ f\,(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f\,(x)$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f \circ g\,(x)$

EXERCICE 4:

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = u \circ v$:

a) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x} + 1)$ b) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$ c) $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ d) $f(x) = |x^2 - x^4|$

EXERCICE 5:

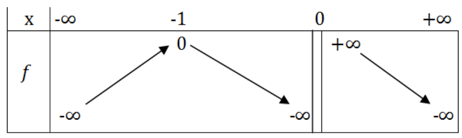
Soit les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x+1}$

1) Montrer que la fonction gof est continue en 2.

2) Montrer que la fonction gof est continue sur $]1,+\infty[$.

EXERCICE 6:

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0}.



Déterminer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(-1+\frac{1}{x^2})$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\frac{1}{x})$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x^3 + \frac{1}{x+1})$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1 - fof(x)}$ et $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{f(x)}$

EXERCICE 7:

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x} + x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que pour out $x > 0$, $2 - x^2 \leq f(x) \leq 2 + x^2$. En déduire que f est continue en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur IR.