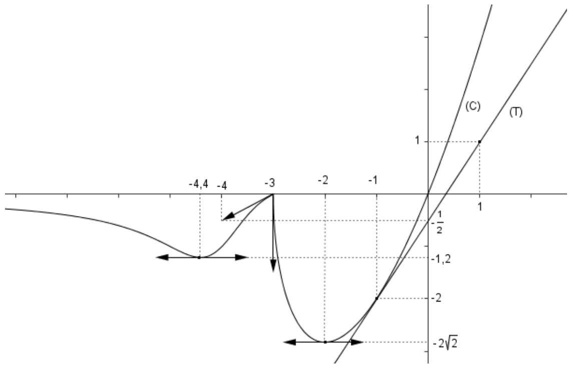
Dérivabilité d'une fonction
Equations à coefficients complexes

Séance 3

EXERCICE 1:



Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.

- (T) est la tangente à (C) au point A(1,1).
- Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.
- La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.

1) a) Déterminer : $f_g'(-3)$ et $\lim\limits_{x \to (-3)^+} \frac{f(x)}{x+3}$

b) Résoudre dans IR l'équation $f'(x) = 0$

2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

EXERCICE 2:

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; $x \in]0,3[$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,3[$ et que $f'(x) = \frac{9}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ pour tout $x \in]0,3[$.

b) Etablir le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,3[$ et que $2,1 < \alpha < 2,2$

3) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$

a) Montrer que la fonction gof est dérivable sur $]0,3[$.

b) Montrer que $(gof)'(x) = -\frac{3}{x^2}$ pour tout $x \in]0,3[$.

c) Etablir alors le tableau de variation de la fonction gof.

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1 < \alpha < \sqrt{2}$

3) a) Montrer que $\forall\, x \in [1, +\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

EXERCICE 4:

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que $1+\frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$, pour tout réel t de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
4. En déduire un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

EXERCICE 5 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) En déduire les solutions dans$\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.

■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ,\vec{u}\,,\vec{v})$.

3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$

EXERCICE 6 :

1) a) Calculer $(2+i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3(2+i)z + 2(3+4i) = 0$

2) Soit l'équation (E') : $z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i = 0$

a) Montrer que l'équation (E') admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_1.

b) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2(3+2i)z^2 + (3+14i)z + 8 - 6i$

Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(z) = (z - z_1)(az^2 + bz + c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').