

Dérivabilité d'une fonction Comportement asymptotique

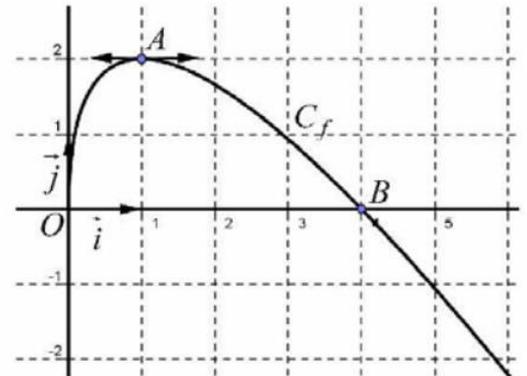
Séance 1

EXERCICE 1:

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f définie et dérivable sur

$]0, +\infty[$ dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On sait que :

- La courbe C_f admet au point $A(1,2)$ une tangente d'équation $y = 2$.
- La courbe C_f passe par le point $B(4,0)$.



- 1) a - Déterminer $f'(1)$.
b - Comparer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(2)$
- 2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = [f(x)]^2$.
a - Exprimer $g'(x)$ en fonction de x .
b - Dresser le tableau de variation de g .

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 2) a) Montrer que la droite $D : y = x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
b) Etudier la position de la droite D par rapport à la courbe (C).
- 3) Etablir le tableau de variation de f .

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $[-3, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{2x+6}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé du plan.

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-3) . En déduire une interprétation géométrique
- 2) Montrer que f est dérivable sur $]-3, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}} \forall x \in]-3, +\infty[$.
- 3) Etablir le tableau de variation de f .
- 4) a) Vérifier que la courbe (C) passe par les points $A(-1, -2)$ et $B(1, 3)$.
b) Montrer que la courbe (C) admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 4:

On donne la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(Voir la figure ci-contre)

✖ La droite $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

✖ La droite D : $y = -1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$

✖ La droite D' : $x = -2$ est une asymptote verticale à (C) à droite et à gauche.

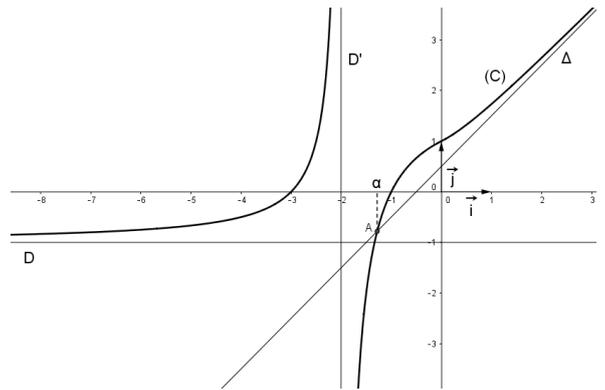
1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x - \frac{1}{2} \right]$$

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Dresser le tableau de signe de l'expression $d(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$

4) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-x}{f(x)-x-\frac{1}{2}}$



EXERCICE 5:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

2) Vérifier que $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

4) Etudier la position de (C) par rapport à Δ .

EXERCICE 6:

Soit la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$. On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et que : $f'(x) = \frac{x+2}{2(\sqrt{x+1})^3} \quad \forall x \in] -1, +\infty[$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point O.

b) Montrer que $f(x) - x = \frac{-x^2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$. En déduire la position de (C) par rapport à (T).

EXERCICE 7:

La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad \forall x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.