SERIE D'EXERCICES N°14

Logarithme népérien - Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 : (BAC 2014)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(2,0,1), B(0,2,1) et C(1,2,0).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

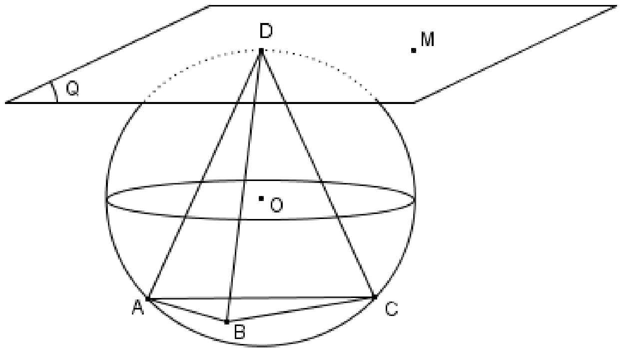
b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$

2) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que les points A, B et C sont des points de la sphère S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.

3) Soit le point D de coordonnée $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$



On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit M(x,y,z) un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Calculer $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$

b) Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

c) En déduire que pour tout point M du plan Q ; V= $\sqrt{\frac{5}{3}}-1$

EXERCICE 2 :

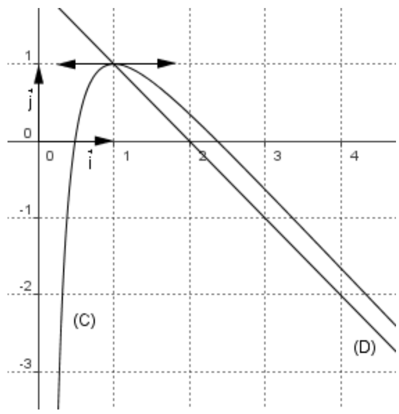
Soit la fonction $f: x \longmapsto \frac{\ln x}{x^3}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Calculer $f(1)$. En déduire le tableau de signe de l'expression $f(x)$ pour tout x>0

3) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 3 :



Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C) de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=ax+b+\frac{\ln x}{x}$ (a et b sont trois réels donnés). La droite (D) : $y=-x+2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

L'axe $(O,\vec{j})$ est une asymptote verticale.

L'unique tangente parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$ est au point A(1,1).

1) A l'aide du graphique dresser le tableau de variation de la fonction f (contenant le tableau de signe de $f'(x)$).

2) a) A l'aide du graphique déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x]$.

b) En déduire la valeur de a et b.

■ On prend dans toute la suite :$f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

3) Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : g(x)= $f(x) + x$

a) Montrer que g'(x)= $\frac{1-lnx}{x^2}$ pour tout $x > 0$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

c) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

EXERCICE 4 :

Soit la fonction définie sur]0,+∞[par f(x)=x+2 $\frac{\ln x}{x}$ et (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) du plan.

1) Montrer que f est dérivable sur]0,+∞[et que f'(x) a le signe de g(x)= x^2 +2−2lnx.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction g. En déduire que g(x)>0

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une solution unique α dans]0,+∞[.

5) a) Montrer que (C) admet une asymptote oblique D dont on donnera une équation.

b) Etudier la position de (C) par rapport à D.

6) Tracer la courbe (C).

EXERCICE 5 :

A/ On considère la fonction g définie sur]0,+∞[par : $g(x) = x(x-1) + \ln x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction g.

2) Calculer g(1). En déduire le signe de $g(x)$ suvant les valeurs de x dans $]0, +\infty[$.

B/ Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par : $f(x) = (x-1)^2 + (\ln x)^2$. On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f selon un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1) Montrer que : $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur]0,+∞[.

3) Montrer que (C) admet au V (+∞) une branche parabolique de direction celle de (O,$\vec{\jmath}$).

4) Tracer la courbe (C).

C/ Soit h(x)= $\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$

1) Vérifier que h(x)= $x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}(\ln x)^2$

2) En déduire la primitive H de la fonction h sur]0,+∞[qui s'annule en 1.

EXERCICE 6 :

I/ Soit la fonction $\boldsymbol{\varphi}$: x ↦ 1−2x.lnx−x

1) Etablir le tableau de variation de la fonction $\boldsymbol{\varphi}$.

2) Calculer $\boldsymbol{\varphi}(1)$. En déduire le signe de $\boldsymbol{\varphi}$(x) suivant les valeurs de x dans]0,+∞[.

II/ Soit f la fonction définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \mathrm{x}^2.\ln \mathrm{x} + 1 & \text{si } \mathrm{x} > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α dans]0,+∞[.

Vérifier que $2 < \alpha < 2{,}1$
4) Etudier la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
5) Tracer la courbe (C)

III/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)= x^3.\ln x$
1) Justifier l'existence des primitives de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2) Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$
3) En déduire la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

EXERCICE 7 :

A/ Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1) Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2+4x+3}{x+1}$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
3) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

B/ On désigne par f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$

On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique étant 2cm.

1) a/ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   b/ Montrer que pour tout réel $x \in]-1,+\infty[$ on a :
   $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
   c/ Dresser le tableau de variation de la fonction .
2) a/ Montrer que (C) admet une asymptote oblique (qu'on notera (D)) au voisinage de $+\infty$.
   b/ Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (D).
   c/ Tracer la droite (D) et la courbe (C).
3) Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $h(x) = [\ln(x+1)]^2$
   a/ calculer $h'(x)$ pour tout $\in]-1,+\infty[$.
   b/ En déduire la primitive de la fonction f qui s'annule en 0.