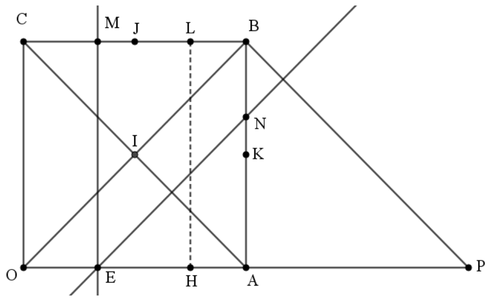
Dérivabilité d'une fonction
Les déplacements et les antidéplacements

Séance 3

EXERCICE 1:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un carré OABC de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit J le milieu de [BC], K le milieu de [AB], L le milieu de [BJ] et H le projeté orthogonal de L sur [OA].
Soit E le point de [OA] distinct de O et de A. La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB] en N.

1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C sur B et M sur N.
2) a) Montrer que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que f(B)=A.
   c) En déduire que I est le centre de la rotation f.
3) a) Montrer que fo $S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
   b) En déduire que $S_{(AB)}$o fo $S_{(AC)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
4) Soit g l'antidéplacement qui envoie C sur B et M sur N.
   a) Montrer que g(B)=A. (On pourra se servir de l'isométrie go $S_{(MC)}$)
   b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on déterminera le vecteur et l'axe.
   c) Soit P le point tel que ACBP soit un parallélogramme. montrer que g(A)=P
5) Montrer que fog est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.



EXERCICE 2:

Le plan étant orienté dans le sens direct. Soit ABC un triangle rectangle direct en A tel que AC= 2.AB . Soit I le milieu de [AC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en I et B en C.
   b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre Ω.
2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g = f$o R^{-1}
   Déterminer g(A). En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AI}}$ o R
3) Soit E= R(I) et F le point tel que AEFI soit un carré. (Construire E et F)
   a) Caractériser l'application fof.
   b) Déterminer fof(A). En déduire que Ω =A*F
4) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui envoie A en F et E en I.
   b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
   (On donne K le milieu de [FI])

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$ et (C_f) sa courbe représentative .

1) a) Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.
   b) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
   b) Interpréter géométriquement les résultats trouvés en 3.a).
4) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Soit $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   a) Montrer que h est dérivable sur $]0, 1[$.
   b) Dresser le tableau de variation de h.

EXERCICE 4:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' varie comme l'indique le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-1 ↗	2	↘ 0

<u>Répondre par **vrai** ou **faux**</u>

1. La courbe de f admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de f.
3. Pour tous réels a et b , on a $|f(a)-f(b)|\leq 2|a-b|$.
4. Si $f'(0)=f(0)=1$ alors $(f\circ f)'(0)=2$.

EXERCICE 5:

Soit la fonction f définie sur$]0, +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f
2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1<\alpha<\sqrt{2}$
3) Montrer que $\forall\, x \in[1, +\infty[$, on a : $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$
4) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Montrer que pour tout n $\in$IN, on a : $u_n\geq 1$.
   b) Montrer que pour tout n $\in$IN, on a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$
   c) En déduire que pour tout n $\in$IN, on a : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$