Lycée Cité El-amel Sola Saidi & Mokhtar Ouardani Classes : 4ème Maths 1 & 2	**Devoir de contrôle n°2** **(Mathématiques)**	Année scolaire : 2016/2017 Date : Mars Durée : 2 heures

Exercice n° 1 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AB = 2AD$.

On désigne par I et O les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BD]$. et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au rectangle ABCD.

1) Soit S la similitude directe qui transforme B en I et I en D.

a- Montrer que $(-\frac{\pi}{4})$ est une mesure de l'angle de S, calculer le rapport de S.

b- Montrer que C est le centre de S.

c- On pose $E = S(A)$. Montrer que D est le milieu du segment $[EI]$.

2) La demi-droite $[CE)$ recoupe $\mathscr{C}$ en F.

a- Justifier que $CE = \sqrt{2}\,CA$ et montrer que $CF = \frac{1}{\sqrt{2}}CA$.

b- En déduire que F est le milieu du segment $[EC]$ et que $F = S(O)$.

3) Soit σ la similitude directe qui transforme B en I et I en D.

a- Déterminer le rapport de σ.

b- On note Ω le centre de σ. Montrer que B est le milieu du segment $[\Omega D]$.

c- Construire Ω et l'axe Δ de σ.

Exercice n° 1' (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $AC = 2AB$.

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) , $I = S_{(AB)}(H)$ et $J = S_{(AC)}(H)$.

1) a- Montrer que $(AI) \perp (BI)$ et $(AJ) \perp (CJ)$.

b- Caractériser $S_{(AB)} o S_{(AC)}$.

c- En déduire que A est le milieu du segment $[IJ]$.

2) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en A.

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

b- Montrer que H est le centre de S.

c- Montrer que $S(I) = J$.

3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en H et H en J.

a- Vérifier que σ est de rapport 2.

b- On note Ω le centre de σ. Montrer que $\overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$.

c- Construire Ω et l'axe Δ de σ.

Exercice n° 2 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M(x,y) tels que: $x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$ et par $\mathscr{P}$ des points M(x,y) tels que: $-4y^2 - 2x + 5 = 0$.

1) a- Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on présidera les sommets, les foyers et les asymptotes.

b- Montrer que $\mathscr{P}$ est une parabole dont on présidera le sommet, le foyer et la directrice.

c- Tracer $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ dans le même repère.

d- Vérifier que la droite T d'équation $x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0$ est une tangente commune à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ au point $A(0, \frac{\sqrt{5}}{2})$.

2) Pour tout $x \in [0,+\infty[$: $F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4+(1-t)^2}\, dt$.

a- Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2$.

b- Calculer $F(0)$ et déduire l'expression de $F(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

c- On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives: $x = 1$ et $x = \dfrac{5}{2}$. Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{15}{8} + 2\ln(2)$.

Exercice n° 3 (9 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$; (Unité graphique : 4 cm).

Partie I : Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 + (1-x)e^x - \ln(x)$.

On désigne par C_g sa courbe représentative dans le repère R.

1) a- Etudier les variations de la fonction g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α tel que $1,23 < \alpha < 1,24$.

c- Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln(x)} & \text{si } x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le repère R.

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$.

3) a- Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{e^{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer la courbe C_f dans le repère R, on prendra $f(\alpha) \simeq 0,38$.

Partie II : On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

1) Montrer que (U_n) est une suite croissante.

2) On pose $\varphi(x) = e^x - (x+1)\ln x$, $\forall x \in [1,+\infty[$

a- On admet que $\forall x \in]1,+\infty[$ $e^x - x\ln x \geq 2$, montrer que $\varphi'(x) \geq 0$.

b- En déduire que $\forall x \in [1,+\infty[$, $\varphi(x) \geq 0$.

3) a- Montrer que $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) - \dfrac{1+x}{e^x} \leq 0$ (Utiliser le résultat de la partie II (2-b)).

b- Montrer que $\forall x \in [1,+\infty[$, $f(x) \geq x e^{-x}$. En déduire que $\forall x \in [1,+\infty[$, $x.e^{-x} \leq f(x) \leq (1+x).e^{-x}$.

c- Calculer les intégrales: $I = \int_1^n x.e^{-x}\,dx$ et $J = \int_1^n (1+x).e^{-x}\,dx$. En déduire un encadrement de U_n.

4) a- Montrer que la suite (U_n) est majorée ℓ.

b- En déduire que (U_n) est convergente vers une limite ℓ et que $\dfrac{2}{e} \leq \ell \leq \dfrac{3}{e}$.

Exercice 5 : (5 points)

Le plan est muni d'un un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M(x, y) tels que : $x^2-4y^2-2x+5=0$

et par $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M(x, y) tels que : $-4y^2-2x+5=0$

1. a. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes.

   b. Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.

   c. Construire $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ dans le même repère.

   d. Vérifier que la droite T d'équation : $x+2\sqrt{5}y-5=0$ est une tangente commune à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ au point $A(0,\frac{\sqrt{5}}{2})$

2. Pour tout $x\geq 0$, on pose : $F(x)=\int_1^{e^x-e^{-x}+1}\sqrt{4+(t-1)^2}\,dt$

   a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$ $F'(x)=(e^x+e^{-x})^2$

   b. En déduire l'expression de F(x) pour tout $x\in[0,+\infty[$.

   c. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{H}$ et les droite respectives $x=1, x=\frac{5}{2}$. Montrer que $\mathcal{A}=\frac{15}{8}+2\ln 2$.

$

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$ et AB=2AD.

On désigne par I le milieu de [AB], O le milieu de [BD] et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au rectangle ABCD

1) Soit S la similitude directe telle que S(B)=I et S(I)=D

a) Montrer que $\frac{-\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de S, calculer le rapport de S

b) Montrer que C est le centre de S

c) On pose E=S(A).monter que D est le milieu du segment [EI]

2)La demi- droite [CE) recoupe $\mathcal{C}$ en F

a)Calculer CE en fonction de CA et montrer que $CF=\frac{1}{\sqrt{2}}CA$

b) En déduire que F est le milieu du segment [EC] et que F=S(O)

3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme B en I et I en D

a)Déterminer le rapport de σ

b) On note ω le centre de σ, montrer que ω est le barycentre des points pondérés (D ,1) et (B,-2)