Lycée Cité El Amel Gabes Année scolaire :2015-2016

Devoir de controle n°1

4emeSC ***(Durée : 120 mn)*** *Mrs:A-LETAIEF+J-HMIDI +S-SOLA*

EXERCICE N° 1 :(3,5 pts)

On a tracé dans un repère orthonormé la courbe **(Cf)** représentatives d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ telle que :

- La courbe **(Cf)** admet une asymptote $\Delta : y=\frac{1}{2}x+1$ au voisinage de $+\infty$
- La droite d'équation x=1 est une asymptote verticale à **(Cf).**
- **(Cf)** admet une branche infinie parabolique de direction celle de $\Delta' : y=\frac{1}{2}x$ au voisinage de $-\infty$

Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x-1}$

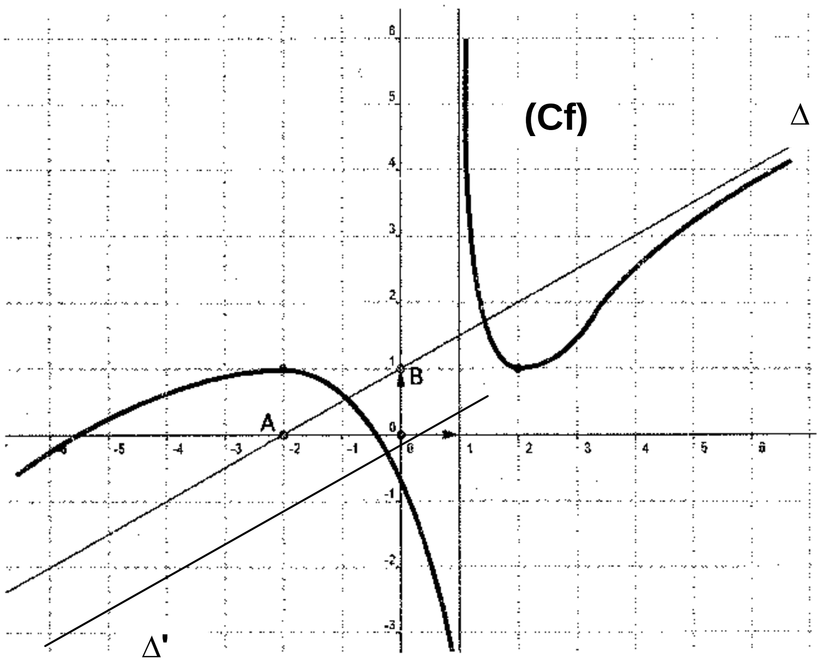
1) a) Déterminer $g\circ f(-2)$ et $f\circ g(5)$

b) Montrer que $g\circ f$ est continue sur $]1+\infty[$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{g\circ f(x)}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-\frac{1}{2}x-1}$,

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\frac{1}{2}x$ *et* $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{f(x)}$



EXERCICE N°2 (5,5 pts) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) a) Montrer que (U_n) est décroissante

b) En déduire que (U_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 0$.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \dfrac{U_n}{n}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = \dfrac{1}{2}$. .

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{2^n} = 0.$

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $W_n = \dfrac{n^2}{2^{2n}}$.

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $on\ a :\ n \le 2^n$

b) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n \le \dfrac{n}{2^n}$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to \infty} W_n$.

EXECICE N°3: (6 pts) Soit a un nombre complexe non nul (E_a) : $z^2 - 2ae^{i\frac{\pi}{4}} z + 2ia^2 = 0$

1) a) Vérifier que $\sqrt{2}a$ est une solution de (E_a).

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points J , A , M et M' d'affixes respectives : 1+i , a , $\sqrt{2}a$ et $\sqrt{2}ia$ *avec* $a = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$

Dans l'annexe on donne le point A et le cercle $\mathscr{C}$. de centre J et de rayon $\sqrt{2}$.

a) Vérifier que $M \in \mathscr{C}$.

b) Montrer que O , A et M sont alignés.

c) Placer alors le point M.

3) a) Montrer que le triangle OMM' est rectangle et isocèle en O.

b) Construire alors le point M'.

EXERCICE N°4 : (5 pts) Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} & si \quad x < 0 \\ f(x) = \pi - \dfrac{\sin(\pi x)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer $\forall \ x \succ 0 \ ; \pi - \dfrac{1}{x} \le f(x) \le \pi + \dfrac{1}{x}$

b) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) Soit *h* la fonction définie sur]- ∞, 0]par *h(x)* = $x^4 + x^2 - 1$.

a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution α et que $-1 \prec \alpha \prec 0$

b) Montrer que $\alpha^2 + 1 = \dfrac{1}{\alpha^2}$. En déduire que $f(\alpha) = \dfrac{-1-\alpha}{\alpha^2}$

Annexe (feuille à rendre avec la copie)

Nom et prénom :…………………………