Devoir de controle n°1

4eme SC (**Durée : 120 mn**) Mrs:A-LETAIEF+J-HMIDI +S-SOLA

EXERCICE N° 1

On a tracé dans un repère orthonormé les courbes **(Cf)** et **(Cg)** représentatives d'une fonction f définie et continue sur IR et d'une fonction g définie et continue sur]0,+∞[telles que :

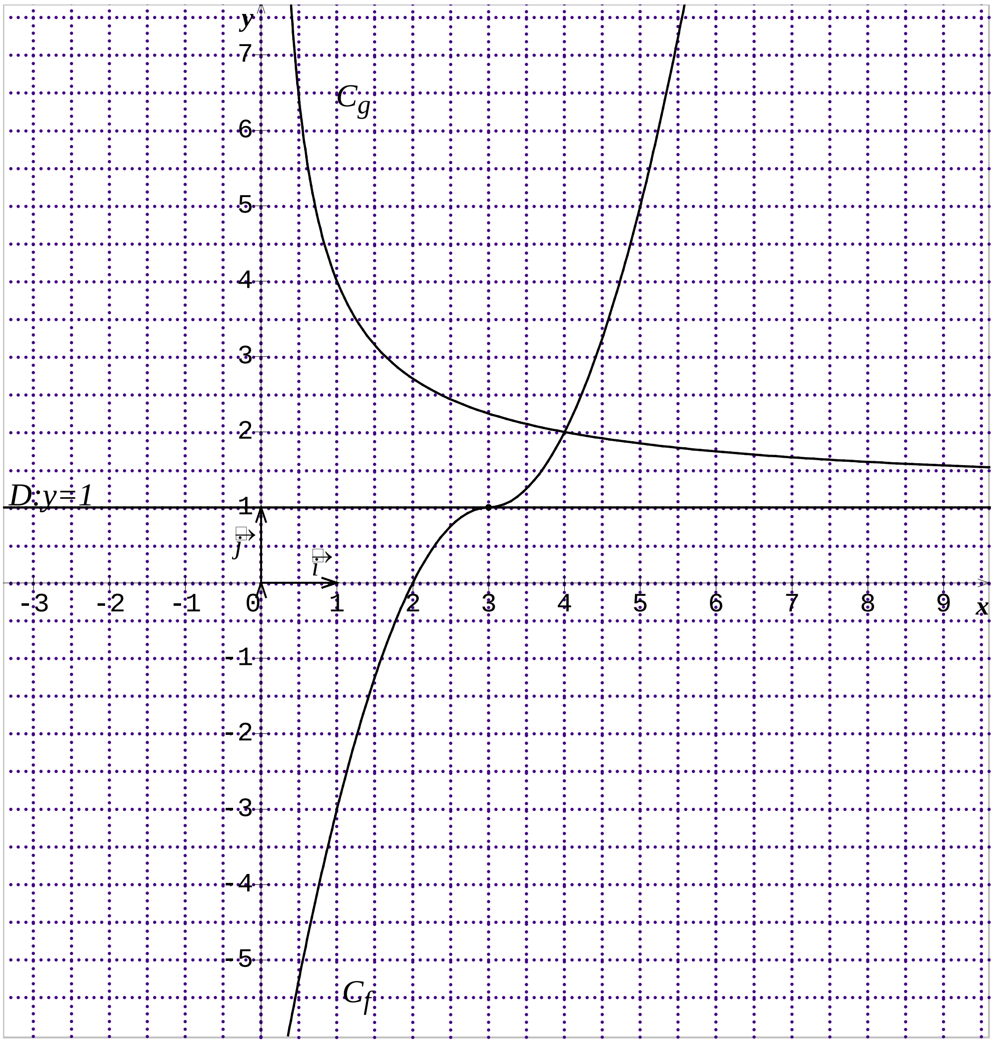
- La courbe **(Cg)** admet une asymptote Δ :y = 1 au voisinage de +∞
- La courbe **(Cg)** admet une asymptote verticale Δ' :x = 0
- **(Cf)** admet deux branches infinies paraboliques de direction celle de (yy') au voisinage de+∞et de−∞

1) Déterminer $f \circ g(1)$, $f \circ g(4)$

2) Déterminer , $\lim\limits_{x \to 0^+} f \circ g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g \circ f(x)$

3) a) Montrer que $f \circ g$ est continue sur]0+∞[

b) Montrer que $f \circ g(x) = 1$ admet au moins une solution α dans [1,4]



EXERCICE N°2 :

I) Résoudre dans ℂ l'équation : $2z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.

II) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation (E) : $z^2 - (1 + 2\cos\theta e^{i\theta})z + 1 + e^{i2\theta} = 0$

1) **a)** Vérifier que **1** est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, M et M' d'affixes respectives **1 , z et 1+z²** avec $z=1+e^{i2\theta}$

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Vérifier que $z=2\cos\theta e^{i\theta}$ En déduire que $\overrightarrow{AM'}=4\cos^2\theta\ \overrightarrow{AM}$

3) Construire les points M et M' pour $\theta=\frac{\pi}{6}$

EXERCICE N°3 :

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)\sin(\frac{\pi}{x^2})}{x-1} & si\quad x\succ 1 \\ f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+x-1 & si\quad x\le 1 \end{cases}$

1) **a)** Montrer que pour tout $x\succ 1$ on a $f(x)=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{x^2})}{\sqrt{x}+1}$

b) En déduire la limite de f à droite en 1

c) f est elle continue en 1 ? Justifier.

2) Montrer que pour tout $x\succ 1$ on a $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICEN°4

Soit la fonction f définie sur$]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle **]0,1[** on a $0\prec f(x)\prec 1$

2) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$ ..

a) Montrer par récurrence que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad 0\prec U_n\le 1$

b) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$

c) En déduire que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad U_n\le(\frac{1}{2})^n$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n=2^{n+2}U_n$

a) Montrer par récurrence que $\forall\ n\in\mathbb{N}\quad U_n=\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})$

(on pourra remarquer que sin(2x)=2cosxsinx et 1+cos2x=2cos²x)

b) Vérifier que $\forall\ n\in\mathbb{N}$ on a $V_n=\pi\left(\dfrac{\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)$

c) En déduire que (V_n) converge vers un réel que l'on déterminera.