Lycée Cité El-amel Sola Saidi & Mokhtar Ouardani	**Devoir de contrôle n°1** **(Mathématiques)**	Année scolaire : 2017/2018 Classes : 4ème Maths 1 & 2

Exercice n° 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur □ par: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}-1 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{\sin(x)-x}{x} & \text{si } x\succ 0\end{cases}$.

On désigne par C_f sa représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) a- Montrer que la droite $\Delta : y=-x-1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

c- Calculer $f0f(\pi)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f0f(x)$.

d- Montrer que $2f(x)+1=0$ admet au moins une solution dans $]\pi\frac{\pi}{2}[$.

3) Soit g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},0]$ par: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(\tan(x))\pi}{\tan(x)} & \text{si } -\frac{\quad}{2}\prec x\prec 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$.

a- Montrer que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},0[$, $g(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$.

b- En déduire que g est continue à gauche en 0.

Exercice n° 2 (7 points)

I) On Considère l'équation (E) : $z^3+2z^2+2z+1=0$.

1) a- Vérifier que -1 est une solution de (E).

b- Résoudre dans □ l'équation (E).

2) On note P, Q et K les points d'affixes respectives $p=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $q=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $k=-1$.

a- Montrer que P , Q et K appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

b- Déterminer l'ensemble Δ des points d'affixes z tels que $|z|=|z+1|$.

c- Montrer que P et Q sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

d- Construire alors P et Q.

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère trois points A , B et C d'affixes respectives trois nombres complexes non nuls a,b et c.
On suppose que l'origine O du repère est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1) a- Montrer que $|a|=|b|=|c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=1$.

b- Montrer que $a+b+c=0$.

c- Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{b}{a}+1\right|=1$.

d- En déduire en utilisant la partie **I)** que $\frac{b}{a}=p$ ou $\frac{b}{a}=q$.

2) Dans cette question on admet que $\frac{b}{a}=p$ et $\frac{c}{a}=q$.

a- Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b- Montrer que $\frac{q-1}{p-1}=\frac{c-a}{b-a}$.

c- Déduire de deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

Exercice n° 3 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+6}{u_n+2}, \ \forall\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par: $f(x)=\frac{7}{3}-\frac{16}{3(3x+10)}$.

a- Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=f(u_n)$.

b- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n}\leq 2\leq u_{2n+1}$.

c- En déduire que si (u_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

3) a- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-2|\leq\frac{1}{2}|u_n-2|$.

b- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-2|\leq\frac{1}{2^{n-1}}$.

c- Calcul alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) Soit les suites (a_n), et (b_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par: $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_{2k}$, et $b_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_{2k+1}$

a- Montrer que pour tout entier naturel k on a: $2-\frac{2}{4^k}\leq u_{2k}\leq 2$ et $2\leq u_{2k+1}\leq 2+\left(\frac{1}{4}\right)^k$.

b- En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=2$.