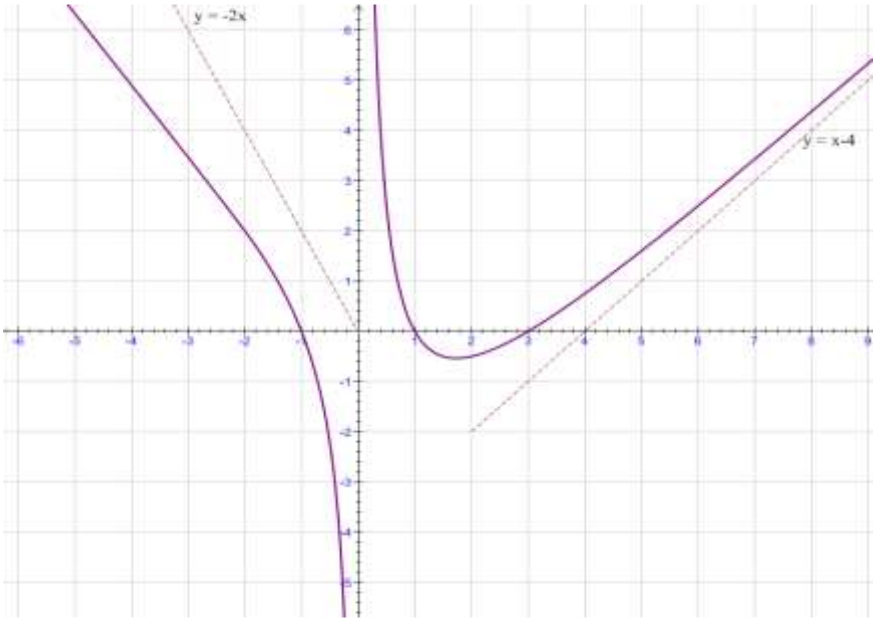
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Nabheni		Date	27/10/2017
Niveau	$4^{ème}$ Maths		Durée	2 h

Exercice 1 : (6 pts)



La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie est continue sur $\mathbb{R}^*$

$y = x - 4$, $x = 0$ sont des asymptotes à C_f

La droite $y = -2x$ est une direction asymptotique à C_f en $-\infty$

1) Déterminer par une lecture graphique les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x} \ , \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)+2x} \ , \lim_{x\to 0^+} f\big(f(x)\big) - f(x) \ , \lim_{x\to 0^-} \frac{f\big(f(x)\big)}{2} + f(x) \ , \lim_{x\to-\infty} \frac{f(2x+f(x))}{x}$$

2) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-1, 0[$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\beta \in]-1,0[$, tel que $\mathrm{h}(\beta) = -1$

b) En déduire alors l'ensemble de définition de $\mathrm{h} \circ \mathrm{h}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction g_n sur l'intervalle $]0,1]$ par $g_n(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} - \mathrm{n\,x}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

b) Montrer que $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$ et en déduire que la suite (α_n) est décroissante.

c) Montrer alors que (α_n) est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 2 : (6 pts)

On considère la suite U définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{5-{U_n}^2}}$

1) a) Montrer que $0 < U_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq \frac{1}{2^n}$ et retrouver la limite de la suite U

3) Soit la suite V définie par $V_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $V_n = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} U_k}$

a) Montrer que la suite V est croissante

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} - V_n \leq \frac{1}{2} U_n$

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n \leq 2 - \frac{1}{2^n}$

b) En déduire que la suite V est convergente et donner un encadrement de sa limite

Exercice 3 : (8 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$, on donne les points $A(1)$, $B(1+i)$ $C(i)$ et $I(\frac{1+i}{2})$

1) Faire une figure puis donner l'écriture exponentielle de $Z_{\overrightarrow{OB}}$ et $Z_{\overrightarrow{AC}}$
2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tels que $\arg(Z_M - Z_I) \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

   b) Déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ tels que $\arg(Z_M - Z_I) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.
3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_m :\ Z^2 - (1+i)Z + m\,i = 0$ où $m \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

   et on désigne par Z_1, Z_2 les solutions de E_m et par M_1, M_2 leurs images respectifs

   a) Montrer que $Z_1 \neq Z_2$

   b) Montrer que I est le milieu de $[M_1M_2]$.
4) a) Montrer que $(Z_1 - Z_I)^2 = \left(\frac{1}{2} - m\right) i$

   b) En déduire que si $m < \frac{1}{2}$ alors $M_1 \in (OB)$ et que si $m > \frac{1}{2}$ $M_1 \in (AC)$
5) Dans cette question on se place dans le cas où $m > \frac{1}{2}$

   a) Montrer alors que la droite (OB) est la médiatrice de $[M_1M_2]$

   b) En déduire que $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{m}$.

   c) Donner alors une construction des points M_1 et M_2
6) Montrer que lorsque $m < \frac{1}{2}$ M_1 et M_2 sont les points d'intersection de la droite (AC)

   et du cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{1-m}$
7) Calculer Z_1 et Z_2 dans le cas où $m > \frac{1}{2}$ puis dans le cas où $m < \frac{1}{2}$

Bon travail.