Lycée Mahmoud Messaadi NABEUL A S 2016-17		Prof : Ammar Nabil Devoir de Contrôle N°1	
9-11-2016	Classe : 4ème Math 1	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h

Exercice 1 : (4,5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$; on donne les points $A(2)$ et $B(-1)$

Soit f l'application du plan qui à tout point $M(z)$ distinct de A associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z}{2-z}$

1) a) Montrer que pour tout $M \neq A$, On a : $M' \neq B$

b) Montrer que $AM \times BM' = 2$

c) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1

d) Montrer que pour tout $M \neq A$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$

e) Construire dans ***la figure 1*** du papier annexe le point M' pour un point $M \in \mathscr{C}$

2) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3 = (2-z)^3$

a) Sans résoudre l'équation (E), montrer que : **si** z est une solution de (E) **alors** $\Re(z) = 1$

b) Déterminer les racines cubiques de l'unité

c) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\pi , \pi\right[$ on a : $z' = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = 1 + i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

d) En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Exercice 2 : (3,5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2 - 4mz + (6-2\sqrt{3}i)m^2 = 0$ où m un paramètre complexe non nul.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient M, A, B et C les points d'affixes respectives : m , $a=(1-\sqrt{3}\,i)\,m$, $b=(3+\sqrt{3}\,i)\,m$ et $c=a+b$

a) Montrer que les points O, M et C sont alignés.

b) Ecrire sous forme exponentielle : $\dfrac{a}{m}$ et $\dfrac{b}{a}$.

c) Expliquer comment construire le point A à partir du point M

d) Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle

e) On a placé dans ***la figure 2*** du papier annexe le point M. Construire les points A, B et C.

Exercice 3 : (8 points)

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=-x$

c) Calculer $f'(x)$ et vérifier qu'elle prend le signe de $(1-x)$ sur $\left]0,+\infty\right[$

d) Dresser le tableau de variation de f

e) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec $\left(O,\vec{i}\right)$ autre que O puis tracer $\mathscr{C}$

2) On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{4} \leq U_n < 1$

b) Montrer que (U_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente vers un réel qu'on précisera

c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{U_n} + 1} - 1 \right)(U_n - 1)$ et en déduire que $|U_{n+1} - 1| \le \dfrac{1}{3} |U_n - 1|$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{3} \right)^n$

3) Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$ et $W_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{U_k}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n - 1| \le \dfrac{3}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 1$

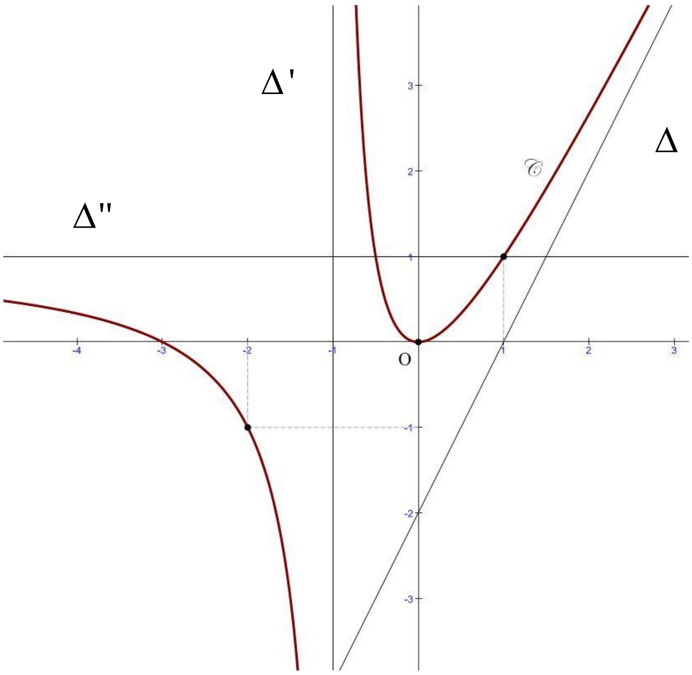
Exercice 4 : (4 points)

I. Dans le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Les droites Δ, Δ' et Δ'' sont des asymptotes à $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ est strictement au dessous de Δ'' sur $]-\infty, -1[$

Choisir la bonne réponse pour chaque question

Aucune justification exigée



1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) =$

a) -2 b) $-\infty$ c) $+\infty$

2) $f \circ f \left( ]-\infty, -2[\right) =$

a) $]0, +\infty[$ b) $]1, +\infty[$ c) $[0, +\infty[$

3) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{f \circ f(x)}{f(x)} =$

a) 2 b) 0 c) $+\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left((1 - f(x)) \sin\left(\dfrac{1}{1 - f(x)} \right) \right) =$

a) 1 b) 0 c) $-\infty$

5) L'équation $f \circ f(x) = 0$ admet dans $]-2, -1[$

a) aucune solution b) une seule solution c) au moins deux solutions

II. **Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1) Le point M d'affixe $z = \dfrac{2}{1 - i\tan\theta}$ varie sur droite.

2) Un argument de $Z = 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta}$ est $\dfrac{3\theta}{2}$.

Annexe

Nom et prénom : ……………………………………………………………………………………………

Figure 1

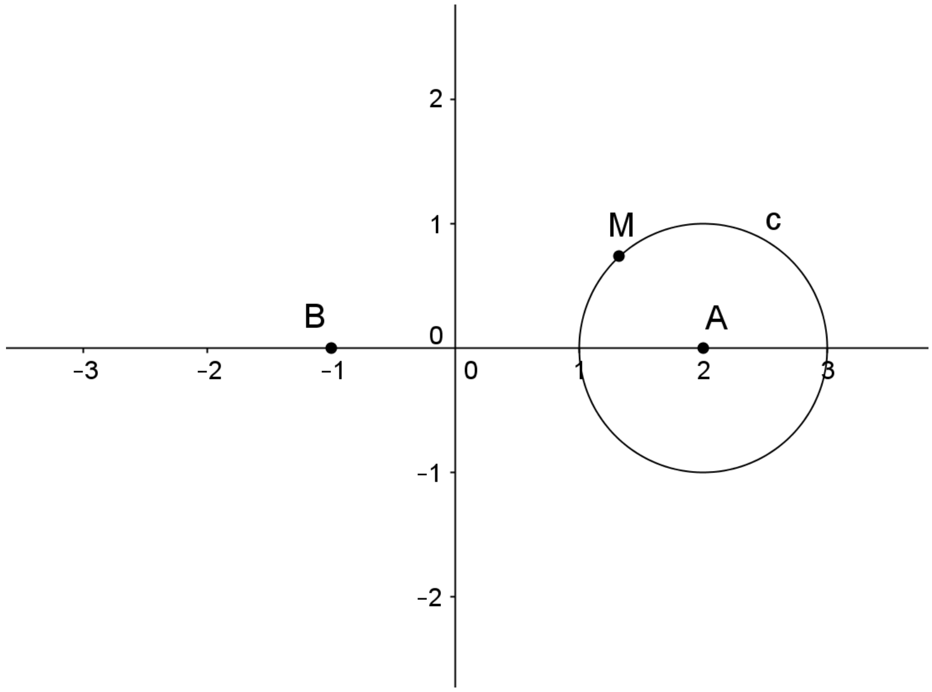


Figure 2