Profs	Mechmeche	Devoir de synthèse N°2	Matière	Maths
Lycée	Nabhani		Date	11/05/2017
Niveau	$4^{ème}$ Maths		Durée	4 h

Exercice 1 : (4 pts)

Un appareil électrique peut présenter après sa fabrication deux types de défauts notés A et B.
On dit que l'appareil est défectueux (évènement D) s'il présente au moins l'un des deux défauts.
On donne $p(D) = 0.069$; $p(A) = 0.02$ et on sait que les évènements A et B sont indépendants

1) Un appareil est choisi au hasard dans la production
   a) Calculer la probabilité qu'il ait le défaut B
   b) Calculer la probabilité qu'il ait seulement le défaut B
2) Soit X l'alia numérique égale au nombre d'appareils défectueux dans un lot de 10 appareils on admet que X suit une loi binomiale.
   a) quels sont les paramètres de X
   b) Quelle est la probabilité d'avoir au plus un appareil défectueux
3) La durée de vie en années d'un tel appareil est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.025$. Une étude statistique a montré qu'après 10 ans un appareil défectueux est encore en état de marche avec une probabilité de 0.4
   on a donc $p((Y > 10)/D) = 0.4$
   a) Calculer $p((Y > 10))$
   b) En déduire $p((Y > 10)/\overline{D})$

Exercice 2 : (4 pts)

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les points $A(1; 2; -2)$; $B(-3; 4; 2)$, I le milieu de $[AB]$ et S l'ensemble défini par : $S = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 16\}$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de S
   b) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $R = 5$
2) Soit P le plan perpendiculaire à la droite (AB) en B
   a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $-2x + y + 2z - 14 = 0$
   b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle $\mathcal{C}_{(B,4)}$ (de centre$B$ et de rayon 4)
3) Soit k un réel non nul et $h_{(A\,,k)}$ l'homothétie de centre A et de rapport k
   a) Donner l'expression analytique de h
   b) Soit $I_k = h(I)$.vérifier qu'on a $I_k(-2k + 1\,; k + 2\,; 2k - 2)$
   c) Calculer en fonction de k la distance de I_k au plan P
4) On pose $S_k = h(S)$
   Pour quelles valeurs de k a-t-on S_k tangente à P.

Exercice 3 : (3 pts)

1) Soit l'équation (E) : $35x - 96y = 1$

   a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) sachant que (11 ;4) est une solution particulière

b) Soit a un entier naturel non divisible par 97, montrer que $a^{96} \equiv 1 (mod\ 97)$

c) En déduire que si $a^{35} \equiv b\ (mod\ 97)$ alors $a \equiv b^m\ (mod\ 97)$ où m est un inverse de $35\ mod\ 96$

2) On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation (F) : $x^{35} \equiv 2\ (mod\ 97)$

a) Soit x_0 une solution de (F), montrer que $x_0 \wedge 97 = 1$

b) En déduire que $x_0 \equiv 2^{11}\ (mod\ 97)$

c) Montrer alors que x solution de (F) équivaut à $x = 11 + 97\ k$ où k est un entier naturel

Exercice 4 : (6 pts)

1) On considère les équations différentielles (E): $y' - 4\ y = 0$ et (F): $y'' - 4\ y = 0$
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{2x} f(x)$
      Montrer que f est solution de (F) si et seulement si g' est solution (E).
   c. En déduire que f est solution de (F) équivaut à $f(x) = \alpha.e^{2x} + \beta.e^{-2x}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4\ t^2}} dt$.
   a. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(x)$
   b. Montrer que φ est impaire
   c. Montrer que pour tout réel t positif on a : $\frac{1}{\sqrt{1+4\ t^2}} \geq \frac{1}{1+2\ t}$.
   d. En déduire que pour tout $x \geq 0$ $\varphi(x) \geq \frac{Ln(1+2\ x)}{2}$ .En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$
   e. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(\varphi^{-1})'(x) = \sqrt{1+4\ (\varphi^{-1})^2\ (x)}$.
   b. Montrer alors que φ^{-1} est solution de (F).
   c. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)$
   d. Expliciter alors $\varphi(x)$ pout tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice 5 : (3 pts)

Le tableau suivant donne pour 10 nouveaux nés, la taille x_i en cm, puis le poids y_i en kg.

x_i	53	48	51	54	50	49	47	52	46	43
y_i	4,1	3,75	3,7	3,95	3,15	3,25	3	3,85	3,1	2,3

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Un ajustement affine est-il justifié ?
2) Par la méthode des moindres carrés, déterminer une équation de la droite de régression de y en x
3) Donner une estimation du poids d'un nouveau-né de taille 56 cm.
4) Trouver un deuxième ajustement affine par la méthode de Mayer