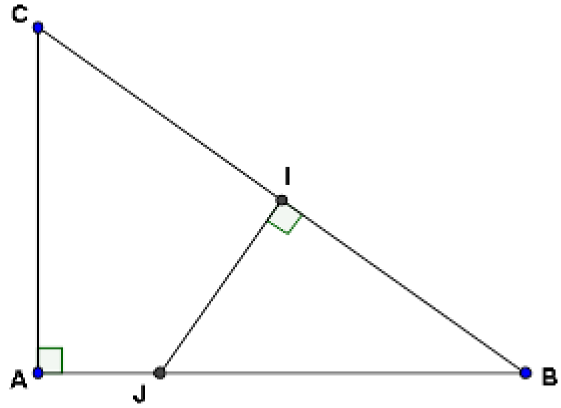
Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°2	Matière	Maths
Lycée	Béchir Nabheni		Date	27/02/2017
Niveau	$4^{ème}$ Maths		Durée	2 h

Exercice 1 : (7 pts)



Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle en A direct tel que $\mathrm{AB} = \sqrt{2}\,\mathrm{AC}$ et la droite (IJ) est la médiatrice de $[\mathrm{CB}]$

Soit f la similitude directe qui envoie B sur I et I sur J

1) a) Déterminer l'angle et le rapport de f

   b) Soit Ω le centre de f caractériser $f o f$

   c) En déduire que $\overrightarrow{\Omega \mathrm{J}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}}$, et que Ω est le projeté orthogonale de I sur (AB)

   d) Montrer alors que J est le milieu de $[\Omega \mathrm{A}]$

   e) Soit $\mathrm{E} = \mathrm{S_I}(\Omega)$, montrer que $\mathrm{f(E)} = \mathrm{A}$

2) Soit g la similitude indirecte qui envoie Ω sur E et J sur I

   a) Calculer le rapport de g

   b) Déterminer $\mathrm{g}of(\mathrm{I})$ et $\mathrm{g}of(\Omega)$ puis caractériser $\mathrm{g}of$

   c) Montrer que $\mathrm{g(A)} = \Omega$

   d) Soit ω le centre de g, montrer $\overrightarrow{\omega \mathrm{E}} = 2\overrightarrow{\omega \mathrm{A}}$ puis que $\omega = \mathrm{S_A(E)}$

3) Soit Δ l'axe de g, Δ coupe (AB) en M et $(\Omega \mathrm{I})$ en N montrer que $\mathrm{g(M)} = \mathrm{N}$

Exercice 2 : (6 pts)

Les questions 1) et 2) sont indépendantes

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste modulo 7 de 3^n

   b) on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$, montrer que $2u_n = 3^n - 1$

   c) Déterminer le reste modulo 7 de u_{62}

   d) Trouver les termes de la suite u qui sont divisibles par 7

2) a) Vérifier que $17 * 33 \equiv 1[40]$

   b) Montrer que pour tout entier naturel n si $a^{17} \equiv b[55]$ et $a^{40} \equiv 1[55]$ alors $b^{33} \equiv a[55]$

   c) justifier que $6^{10} \equiv 1[11]$ et $6^4 \equiv 1[5]$ puis en déduire que $6^{40} - 1$ est divisible par 55

   d) On donne $6^{17} \equiv 41[55]$ déterminer le reste modulo 55 de 41^{33}

Exercice 3 : (7 pts) (partie A du bac 94)

Soit f l'application définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x + Ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) a- Montrer que f est continue sur IR

   b- Etudier la dérivabilité de f au point 1

2) a - Etudier les variations de l'application f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

   b- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives y = 1, x=1 et x=e.

3) Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = \int_1^x t\, f(t)\, dt$

   a- Ecrire l'expression de φ(x) en fonction de x ($x \in$ IR).

   b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

   c- Etudier les variations de la fonction φ et tracer sa courbe représentative (C') dans un autre repère orthonormé du plan P.